ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР И СВЯЗАННЫЕ С НИМ СОСТОЯНИЯ С БОЛЬШИМ ЗНАЧЕНИЕМ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Андреев В. А.

Физический институт им. П.Н. Лебедева, Российская академия наук, http://www.lebedev.ru
Москва 119991, Российская Федерация

Поступила 22.04.2017
Представлена действительным членом РАЕН А.А.Рухадзе

Дан обзор свойств двух типов квантовых состояний, обладающих большой неопределенностью по координате и импульсу. Оба они получаются из состояний гармонического осциллятора с помощью некоторых преобразований. Первый тип – это коррелированные состояния, они получаются из когерентных состояний с помощью преобразования Боголюбова. Дисперсии координаты и импульса такого состояния зависят от параметров этого преобразования и могут принимать, вообще говоря, сколь угодно большие значения. Их конкретные величины определяются теми физическими процессами, с помощью которых реализуется преобразование Боголюбова. Рассмотрен конкретный пример такого физического процесса. Другой тип – растянутые состояния. Формально они возникают, когда частичное состояние гармонического осциллятора подвергается преобразованию, ассоциированному с масштабным преобразованием фазового пространства. Дисперсии координаты и импульса этих состояний зависят от параметра масштабного преобразования и также могут принимать сколь угодно большие значения. Физически растянутые состояния можно получить, пропуская n-фотонные состояния через квантовый усилитель. При этом роль масштабного преобразования фазового пространства играет коэффициент усиления квантового усилителя.

Ключевые слова: **гармонический осциллятор, коррелированные состояния, сжатые состояния, растянутые состояния, соотношения неопределенностей, постоянная Планка**

УДК 530.145, 539.17

Содержание

1. ВВЕДЕНИЕ

Данный обзор ставит задачу систематизировать разрозненные факты, относящиеся к области низкоэнергетических ядерных реакций (НЯР, Low Energy Nuclear Reactions – LENR), а также необычных явлений, связанных с электромагнитным полем. До недавнего времени эта область находилась вне широкого научного обсуждения. Поскольку большинство наблюдаемых явлений данного типа не имели теоретического объяснения и находилось в противоречии с устоявшимися представлениями о физике процессов такого рода. Их списывали на недостаточную чистоту экспериментов, малую статистику и слабую, по мнению критиков, квалификацию авторов. К тому же некоторые из авторов не давали детального описания своей установки и условий эксперимента, что делало невозможным независимую проверку результатов и порождало сомнения в их добросовестности. Как результат, исследования такого рода, не имея авторитетной поддержки в академической среде, соответственно не получали и необходимой финансовой и административной поддержки, приобретали одиозный оттенок и отбрасывались в маргинальную область.

В последние годы ситуация изменилась. Во-первых, количество перешло в качество, и обилие результатов, полученных в авторитетных научных центрах в разных странах, уже не позволяло от них отмахиваться. Во-вторых, что более важно, выяснилось, что разработка этой темы сулит человечеству неисчерпаемый безопасный источник энергии и открывает пути к дешевой и быстрой дезактивации радиоактивных изотопов, возникающих при работе атомных реакторов. Это стимулировало и активность теоретиков в этой области, что привело к пониманию того, что такие явления и процессы не противоречат законам природы и многие из них могут быть описаны с помощью традиционных теоретических подходов. Здесь мы даем ссылки на некоторые наиболее доступные и информативные источники по данной тематике [1-6], при желании этот список можно значительно расширить.

Одной из первых работ, в которой обсуждались НЯР, была [7].

Вместе с тем, по нашему мнению, для объяснения некоторых фактов необходимо выйти за рамки традиционных методов и более широко посмотреть на законы природы и на те следствия, которые из них следуют.

Это представляется вполне естественным, ведь круг тех явлений, о которых мы будем говорить в данном обзоре, весьма широк, и трудно ожидать, что все их удастся описать с помощью одной модели. В данном обзоре мы разберем две такие модели: модель коррелированных состояний и модель растянутых состояний.

Эти модели построены в рамках традиционной квантовой механики и не используют никаких дополнительных физических допущений, отличных от общепринятых. Ранее они использовались в других задачах. В данном обзоре мы изложим их формальную структуру, но не будем касаться их возможных приложений.

Одно из явлений, которое активно обсуждается в связи с НЯР, это туннельный эффект. Известно, что вероятность протекания ядерных реакций с участием заряженных частиц при малой или средней энергии определяется, в значительной степени, существованием кулоновского барьера. Заряженные частицы могут преодолевать этот барьер благодаря туннельному эффекту. Вероятность протекания ядерных реакций определяется вероятностью прохождения заряженных частиц сквозь барьер, поэтому представляет интерес рассмотреть те факторы, которые повышают эту вероятность.

Одним из таких факторов является связь произведения дисперсий координаты и импульса с вероятностью прохождения частицы сквозь потенциальный барьер. Предполагается, что возрастание произведения дисперсий координаты и импульса приводит к возрастанию прозрачности барьера, что, в свою очередь, повышает вероятность ядерных реакций при низкой энергии взаимодействующих частиц. Вообще говоря, это утверждение нельзя считать абсолютно справедливым, чем-то вроде математической теоремы, иногда оно может выполняться, а иногда – нет. Все зависит от конкретной ситуации. В данной работе мы рассмотрим два типа состояний, для которых неопределенности координаты и импульса могут принимать произвольно большие значения. Вопроса о том, возникают ли они в атомных ядрах, и если возникают, то способствуют ли протеканию низкоэнергетических ядерных реакций, мы здесь касаться не будем.

Но сначала мы приведем основные сведения, касающиеся соотношений неопределенностей. Это необходимо для унификации терминологии и обозначений, которые мы будем использовать в дальнейшем.

2. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Соотношения неопределенностей являются важнейшей характеристикой квантовых состояний, которая отличает их от классических состояний. Тот факт, что у таких состояний невозможно одновременно измерить с произвольной точностью некоторые параметры, с одной стороны ограничивает наши возможности в локализации данного состояния, но с другой, обеспечивает возможность обнаружить его вне области классической локализации.

Приведем основные факты, касающиеся соотношений неопределенности. Здесь мы следуем, в основном, работе [8].

Пусть мы имеем некоторую наблюдаемую величину A, которой сопоставлен оператор $\hat{A}$.

Под "неопределенностью" величины A понимают ее среднеквадратичное отклонение ΔA, полагая

$$\Delta \mathrm{A} = \sqrt{\sigma_A}. \tag{1}$$

Здесь σ_A – дисперсия величины A:

$$\sigma_A = \left\langle \hat{\mathrm{A}}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{\mathrm{A}} \right\rangle^2. \tag{2}$$

Если состояние системы является чистым и описывается волновой функцией ψ, то среднее значение наблюдаемой A по этому состоянию имеет вид

$$\left\langle \hat{\mathrm{A}} \right\rangle = \int \psi^* \hat{\mathrm{A}} \psi dV. \tag{3}$$

Если же состояние является смешанным и описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$, то

$$\left\langle \hat{\mathrm{A}} \right\rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{\mathrm{A}}). \tag{4}$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга было получено в 1927 году для операторов координаты и импульса. Оно имеет вид [9]

$$\sigma_p \sigma_x \geq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{5}$$

В 1930 году независимо Робертсоном и Шредингером было получено неравенство, справедливое для произвольных эрмитовых операторов $\hat{\mathrm{A}}$ и $\hat{B}$ [10, 11].

$$\sigma_A \sigma_B - \sigma_{AB}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \left\langle \left[\hat{\mathrm{A}}, \hat{B} \right] \right\rangle \right|. \tag{6}$$

Здесь

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \left\langle \hat{\mathrm{A}}\hat{B} + \hat{B}\hat{\mathrm{A}} \right\rangle - \left\langle \hat{\mathrm{A}} \right\rangle \left\langle \hat{B} \right\rangle. \tag{7}$$

Неравенство (6) называется неравенством Робертсона-Шредингера, его частным случаем является неравенство для операторов координаты и импульса

$$\sigma_p \sigma_x - \sigma_{px}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{8}$$

Неравенства (5) и (6) выполняются для любых квантовых состояний, но в ряде случаев их можно уточнить. А именно, рассматривая некоторые классы состояний, или даже отдельные состояния, можно обнаружить, что для них левые части неравенств превосходят минимальные значения неопределенностей. Прежде всего отметим, что знак равенства в соотношениях (5),(6) может достигаться только на чистых состояниях. Если же состояние является смешанным, и задается матрицей плотности $\hat{\rho}$, то неравенства (5),(6) принимают вид

$$\sigma_p \sigma_x \geq \frac{\hbar^2}{4} \Phi(\mu),$$

$$\sigma_A \sigma_B - \sigma_{AB}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \left\langle \left[\hat{\mathrm{A}}, \hat{B} \right] \right\rangle \right| \Phi(\mu). \tag{9}$$

Здесь μ – т.н. параметр чистоты (purity)

$$\mu = Sp(\hat{\rho}^2), 0 < \mu \leq 1. \tag{10}$$

Величина $\Phi(\mu)$ – функция, монотонно растущая при уменьшении параметра μ, такая, что $\Phi(1) = 1$. Для чистых состояний $\rho^2 = \rho$ и $\mu = 1$.

Однако, и для чистых состояний левая часть соотношений неопределенностей может оказаться больше минимального значения. В качестве примера рассмотрим N-частичные состояния гармонического осциллятора $\left| N \right\rangle$. Для таких состояний соотношение (5) имеет вид

$$\sigma_p \sigma_x = (2N+1) \frac{\hbar^2}{4}. \tag{11}$$

И для некоторых других, более сложных состояний, можно получить оценки для отвечающих им соотношений неопределенностей.

Так, в случае коррелированных состояний правая часть неравенств (5), (6) умножается на величину $1/(1 - r^2)$, где $0 \leq r < 1$ – коэффициент корреляции. А в случае растянутых состояний права часть неравенств (5),(6) умножается на величину λ^{-2}, где $0 < \lambda \leq 1$ – коэффициент масштабного преобразования в фазовом пространстве. Ниже мы подробно обсудим эти состояния. Сейчас же отметим только то, что во всех этих случаях можно ввести величину $\hbar_{eff}$ – эффективную постоянную Планка.

$$\hbar_{eff} = \hbar \sqrt{\Phi(\mu)}, \hbar_{eff} = \frac{\hbar}{\sqrt{(1-r^2)}}, \hbar_{eff} = \frac{\hbar}{\lambda}. \tag{12}$$

В контексте идеологии данной работы увеличение неопределенности тех или иных состояний можно попытаться связать с возрастанием вероятности прохождения квантовых состояний сквозь потенциальный барьер. Надежда на то, что такая зависимость имеет место, обусловлена тем, что при подходящих выборах параметра чистоты μ и коэффициентов корреляции r и масштабного преобразования λ величина эффективной постоянной Планка $\hbar_{eff}$ может значительно превышать величину обычной постоянной Планка $\hbar$. Это указывает на то, что флуктуации координаты и импульса соответствующего квантового состояния возрастают, и в результате этих флуктуаций оно может перескочить потенциальный барьер. Кроме того, если посмотреть на формулу для вероятности туннельного перехода, то видно, что чем больше величина постоянной Планка, тем больше и вероятность туннельного перехода.

Впрочем, примеры показывают, что прямой связи между неопределенностью и вероятностью прохождения через потенциальный барьер не существует. Так, в частности, если мы имеем волновую функцию $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, являющуюся суперпозицией двух волновых функций, максимумы амплитуд которых расположены на оси X по одну сторону от потенциального барьера, то коэффициент прохождения T через потенциальный барьер для такой функции ψ имеет вид

$$T = |c_1|^2 T_1 + |c_2|^2 T_2, \qquad (13)$$

где T_1 и T_2 коэффициенты прохождения, отвечающие по отдельности волновым функциям ψ_1 и ψ_2.

Выражение (13) не зависит от того, как локализованы по отношению друг к другу волновые пакеты ψ_1, ψ_2, а вот соотношение неопределенности для функции ψ от этого зависит, и, раздвигая положения локализации волновых пакетов ψ_1, ψ_2 относительно друг друга, можно увеличивать неопределенность волновой функции ψ, но коэффициент прохождения (13) при этом меняться не будет. Это точный результат, и он показывает, что в каждом конкретном случае связь между неопределенностью волновой функции и вероятностью прохождения через потенциальный барьер надо изучать отдельно.

Эта проблема изучалась также в работах [12, 13]. В работе [12] изучалась эволюция волнового пакета, имеющего гауссову форму, при наличии отталкивающего дельта-потенциального барьера. Для начального пакета, локализованного достаточно далеко от барьера, был определен коэффициент прохождения как вероятность обнаружить частицу на всей полуоси по другую сторону барьера. Этот коэффициент зависит от двух безразмерных параметров: нормализованного отношения силы потенциала к начальному среднему значению импульса и отношения начальной дисперсии импульса к начальному среднему значению импульса. Было показано, что при малых значениях второго параметра результат сводится к известной формуле прозрачности дельта-барьера, полученной в приближении плоской волны путем решения стационарного уравнения Шредингера. При больших значениях второго параметра коэффициент прохождения может быть намного больше, чем рассчитанный в приближении плоских волн.

В работе [13] рассматривалась задача о туннелировании волнового пакета через кулоновский барьер. Показано, что величина коэффициента прохождения может сильно отличаться от стандартного выражения, полученного в приближении плоских волн (ВКБ), и может превосходить его во много раз. Установлено, что величина коэффициента прохождения сильно зависит от формы пакета.

Отметим также работу [14], в которой изучалась связь между соотношением неопределенностей Гейзенберга и соотношением ошибка измерения-возмущение.

На самом деле, помимо упомянутых, существует много и других состояний с большим соотношением неопределенностей. Наш интерес к коррелированным и растянутым состояниям обусловлен тем, что известны процессы, с помощью которых их можно генерировать.

Так, в частности, лет 20-30 назад многие научные группы, как в России, так и за рубежом занимались изучением сжатых состояний и разрабатывали способы их получения. При этом они интересовались только их коэффициентом сжатия, а про коэффициент корреляции и не вспоминали. Нам представляется полезным проанализировать сейчас эти работы на предмет того, какие коэффициенты корреляции возникали у их состояний.

3. СЖАТЫЕ И КОРРЕЛИРОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Одним из возможных объектов, с помощью которых можно пытаться объяснить НЯР, являются сжатые и коррелированные состояния. С формальной точки зрения это специальные обобщения когерентных состояний гармонического осциллятора. Их отличительной чертой является то, что для них дисперсии координаты и импульса могут принимать различные значения, в зависимости от параметров состояния. Эти значения могут быть сколь угодно большими, что позволяет связать эти состояния с явлениями увеличения вероятности прохождения частиц через потенциальный барьер.

Действительная и мнимая части электромагнитного поля, находящегося в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$, испытывают флуктуации с равными дисперсиями. Основное состояние гармонического осциллятора является частным случаем когерентного состояния. Ему отвечает $\alpha = 0$. У этих состояний область распределения канонических переменных в фазовом пространстве имеет форму круга. Волновой пакет когерентного состояния движется в осцилляторном потенциале между классическими точками поворота, сохраняя свою форму. Ширина этого волнового пакета тождественна ширине волнового пакета основного состояния осциллятора.

Существуют такие состояния, у которых распределение канонических переменных в фазовом пространстве деформировано таким образом, что дисперсия одной канонической переменной уменьшается за счет увеличения дисперсии другой канонической переменной. Область распределения канонических переменных принимает овальную форму, схожую с эллипсом. Такая деформация области распределения называется «сжатием», а сами такие состояния – сжатыми состояниями. В отличие от когерентных состояний, ширина волнового пакета сжатого состояния осциллирует, когда эти пакеты движутся туда и обратно в осцилляторном потенциале.

Сжатые состояния активно изучались, как теоретически, так и экспериментально. Были предложены и реализованы различные способы их генерации. Однако тот факт, что они зачастую являются еще и коррелированными состояниями, оставался в тени. Конечно, этот факт отмечался некоторыми авторами, но никак не использовался. В настоящее время именно наличие у таких состояний внутренней корреляции привлекает к ним внимание. Именно этот факт используется в работах [15-17] для объяснения НЯР.

В данном разделе мы опишем основные свойства сжатых и коррелированных состояний, а также некоторые методы их генерации.

Дадим формальное определение сжатых и коррелированных состояний, и опишем их основные свойства [8, 18]. Как уже отмечалось, эти состояния являются обобщением когерентного состояния. Пусть мы имеем одномерный гармонический осциллятор. Его гамильтониан $\hat{H}$ имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{q}^2) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \quad (14)$$

Операторы координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p}$, а также операторы рождения и уничтожения $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ имеют вид

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}, \hat{q} = x, \quad (15)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{p}, \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{p}. \quad (16)$$

Операторы (15), (16) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar, \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1. \quad (17)$$

Операторы координаты и импульса выражаются через операторы рождения-уничтожения следующим образом

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (18)$$

n-частичные состояния гармонического осциллятора $|n\rangle$ являются собственными функциями гамильтониана (14)

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle. \quad (19)$$

Когерентные состояния гармонического осциллятора имеют вид

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \quad (20)$$

Здесь α – произвольное комплексное число.

Состояния (20) удовлетворяют уравнению

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (21)$$

Соотношение (21) можно считать определением когерентного состояния.

Когерентное состояние $|\alpha\rangle$ можно получить из вакуумного состояния $|0\rangle$ с помощью оператора сдвига $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (22)$$

Используя определение (18) операторов $\hat{q}$, $\hat{p}$ можно найти их средние значения в когерентном состоянии (20).

$$\langle\alpha|\hat{q}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\mathrm{Re}\,\alpha, \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \sqrt{2\hbar m\omega}\,Im\alpha. \quad (23)$$

Также можно вычислить дисперсии операторов $\hat{q}$, $\hat{p}$:

$$\sigma_q = \langle\alpha|\hat{q}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{q}|\alpha\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega},$$

$$\sigma_p = \langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle^2 = \frac{1}{2}m\omega\hbar. \quad (24)$$

Из соотношений (24) получаем, что

$$\sigma_q\sigma_p = \frac{1}{4}\hbar^2. \quad (25)$$

Таким образом, мы видим, что на когерентных состояниях (20) соотношение неопределенностей Гейзенберга принимает вид равенства, т.е. эти состояния обладают минимальной неопределенностью.

Рассмотрим линейное преобразование операторов рождения-уничтожения $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$, которое переводит их в другие операторы.

$$\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger = v^*\hat{a} + u^*\hat{a}^\dagger. \quad (26)$$

В том случае, когда комплексные числа u, ν удовлетворяют соотношению

$$|u|^2 - |\nu|^2 = 1, \quad (27)$$

операторы $\hat{b}^\dagger, \hat{b}$ удовлетворяют коммутационному соотношению

$$\left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] = 1. \quad (28)$$

Такие преобразования называются преобразованиями Боголюбова.

В этом случае операторы $\hat{b}^\dagger, \hat{b}$ можно рассматривать как некоторые новые операторы рождения-уничтожения. Для них можно ввести вакуумное состояние $|0\rangle_\beta$ и когерентное состояние $|\beta\rangle$. Эти состояния определяются соотношениями

$$\hat{b}|0\rangle_\beta = 0, \hat{b}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle, \langle\beta|\beta\rangle = 1. \quad (29)$$

Когерентное состояние $|\beta\rangle$ можно получить из вакуумного состояния $|0\rangle_\beta$ с помощью преобразования, аналогичного (22)

$$|\beta\rangle_\beta = \hat{D}(\beta)|0\rangle_\beta. \quad (30)$$

Оператор сдвига имеет вид $\hat{D}(\beta) = \exp(\beta\hat{b}^\dagger - \beta^*\hat{b})$..

В координатном представлении состояние имеет вид

$$\psi_\beta(x) = \left[\frac{\omega(|u|+|v|)^2}{\pi\hbar}\right]^{1/4} \exp\left\{-\frac{\omega}{2\hbar}\frac{u-v}{u+v}\left[x - \left(\frac{2\hbar}{\omega}\right)^{1/2}\frac{\beta}{u+v}\right]^2\right\}. \quad (31)$$

При u = 1, ν = 0 выражение (31) переходит в волновую функцию обычного когерентного состояния.

Преобразование (26) задается двумя комплексными числами $u = |u|e^{i\varphi_u}$ и $v = |v|e^{i\varphi_v}$, на которые наложено соотношение (27). Введем следующие обозначения

$$\varphi = \varphi_u, \quad \theta = -\varphi_u - \varphi_v, \quad \tau = \ln(|u| + |v|). \quad (32)$$

Из (27) следует, что $\tau \geq 0$.

Найдем теперь средние значения операторов $\hat{q}$, $\hat{p}$, заданных формулами (18), в когерентном состоянии (30).

$$\langle\beta|\hat{q}|\beta\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\left[(u^* - v^*)\beta + (u - v)\beta^*\right],$$

$$\langle\beta|\hat{p}|\beta\rangle = -i\sqrt{2\hbar m\omega}\left[(u^* - v^*)\beta - (u - v)\beta^*\right]. \quad (33)$$

Вычислим также дисперсии операторов $\hat{q}$, $\hat{p}$ в когерентном состоянии $|\beta\rangle$.

$$\sigma_q(\beta) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[ch(2\tau) - sh(2\tau)\cos(2\varphi + \theta)\right],$$

$$\sigma_p(\beta) = \frac{m\omega\hbar}{2}\left[ch(2\tau) + sh(2\tau)\cos(2\varphi + \theta)\right]. \quad (34)$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга для состояния $|\beta\rangle$ принимает вид

$$\sigma_q(\beta)\sigma_p(\beta) = \frac{\hbar^2}{4}\left[ch^2(2\tau) - sh^2(2\tau)\cos^2(2\varphi + \theta)\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left[1 + sh^2(2\tau)\sin^2(2\varphi + \theta)\right] \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (35)$$

Из формул (34), (35) видно, что в результате преобразования (26) у состояния (30) изменились как значения дисперсий координаты и импульса, так и общая величина неопределенности. При этом, в зависимости от значений параметров преобразования (32) дисперсии $\sigma_q(\beta)$ и $\sigma_p(\beta)$ могут, как возрастать, так и убывать, а вот их произведение $\sigma_q(\beta)\sigma_p(\beta)$ всегда возрастает, т.е. возрастает неопределенность преобразованного когерентного состояния (30).

Свойства состояний $|\beta\rangle$ удобно характеризовать с помощью двух величин: коэффициента корреляции r

$$r = \frac{Im(uv^*)}{\sqrt{(1/2 + |v|^2) - (Re(uv^*))^2}} =$$

$$= \frac{\sin(\theta + 2\varphi)}{\sqrt{cth^2 2\tau - \cos^2(\theta + 2\varphi)}}, \quad (36)$$

и коэффициента сжатия k

$$k = \frac{1/2 + |v|^2 - (Re(uv^*))^2}{1/2 + |v|^2 + (Re(uv^*))^2} =$$

$$\left[1 - \frac{\cos(\theta + 2\varphi)}{cth2\tau}\right]\left[1 + \frac{\cos(\theta + 2\varphi)}{cth2\tau}\right]^{-1}. \quad (37)$$

Сравнивая выражения (35) и (36), можно выразить произведение дисперсий $\sigma_q(\beta)\sigma_p(\beta)$ через коэффициент корреляции

$$\sigma_q(\beta)\sigma_p(\beta) = \frac{\hbar^2}{4(1 - r^2)}. \quad (38)$$

Мы видим, что произведение дисперсий, которое входит в соотношение неопределенностей Гейзенберга, зависит от коэффициента корреляции, но не зависит от коэффициента сжатия. Выбирая параметры (32) преобразования (26) нужным образом, можно получать те или иные значения коэффициентов корреляции и сжатия.

Так, например, если $\theta + 2\varphi = 0$, мы имеем

$$r = 0,\ k = e^{-4\tau}. \quad (39)$$

В этом случае возникают сжатые, но некоррелированные состояния. Величины дисперсий (34) принимают вид

$$\sigma_q(\beta) = \frac{\hbar}{2m\omega}e^{-2\tau}, \sigma_p(\beta) = \frac{m\omega\hbar}{2}e^{2\tau}. \quad (40)$$

Мы видим, что величина дисперсии координаты уменьшается, а величина дисперсии импульса возрастает. Если же $\theta + 2\varphi = \pi$, то

$$\sigma_q(\beta) = \frac{\hbar}{2m\omega}e^{2\tau}, \sigma_p(\beta) = \frac{m\omega\hbar}{2}e^{-2\tau}. \quad (41)$$

В этом случае наоборот, величина дисперсии координаты возрастает, а величина дисперсии импульса уменьшается. Но в обоих случаях (40) и (41) соотношение неопределенностей Гейзенберга имеет вид (25).

Если же $\theta + 2\varphi = \pi/2$, то

$$r = \mathrm{th}2\tau,\ k = 1. \quad (42)$$

У таких состояний сжатие отсутствует, но имеется корреляция. Дисперсии (34) принимают вид

$$\sigma_q(\beta) = \frac{\hbar}{2m\omega}ch(2\tau), \sigma_p(\beta) = \frac{m\omega\hbar}{2}ch(2\tau). \quad (43)$$

Произведение дисперсий (43) имеет вид

$$\sigma_q(\beta)\sigma_p(\beta) = \frac{\hbar^2}{4}ch^2 2\tau. \quad (44)$$

Мы видим, что у таких состояний область распределения канонических переменных в фазовом пространстве сохраняет симметричную форму круга, но радиус этого круга увеличивается.

Рассмотрим теперь некоторые способы генерации сжатых и коррелированных состояний.

4. ВОЗБУЖДЕНИЕ СЖАТЫХ И КОРРЕЛИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ

С формальной точки зрения наиболее простым способом возбуждения сжатых и коррелированных состояний является параметрическое возбуждение гармонического осциллятора. Это связано с тем, что для осциллятора с переменной частотой, находящегося под действием внешней силы, можно найти точные решения нестационарного уравнения Шредингера и проанализировать их свойства. Здесь мы рассмотрим систему, у которой внешняя сила равна нулю, а переменной является частота.

Рассмотрим нестационарное уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2(t)x^2\right]\psi(x,t). \quad (45)$$

Его решение имеет вид

$$\psi_\beta(x,t) = \left[\frac{\omega_0}{\pi\hbar\epsilon^2(t)}\right]^{1/4} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{i\dot\epsilon(t)}{2\hbar\epsilon(t)}x^2 + \left(\frac{2\omega_0}{\hbar}\right)^{1/2}\frac{\beta}{\epsilon(t)}x - \frac{\beta^2\epsilon^*(t)}{2\epsilon(t)} - \frac{|\beta|^2}{2}\right]. \quad (46)$$

Решение (46) зависит от функции $\epsilon(t)$, которая является решением уравнения

$$\frac{d^2\epsilon(t)}{dt^2} + \omega^2(t)\epsilon(t) = 0, \quad (47)$$

с начальным условием

$$\epsilon(0) = 1,\ \dot\epsilon(0) = i\omega_0. \quad (48)$$

Решения уравнения (47) нельзя записать в явном виде, но они хорошо исследованы. В том случае, когда $\omega(t)$ является периодической функцией, оно сводится к уравнениям Матье и Хилла.

Введем параметры

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot\epsilon(t)}{i\omega_0} + \epsilon(t)\right),\ \ v = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot\epsilon(t)}{i\omega_0} - \epsilon(t)\right) \quad (49)$$

Величины (49) удовлетворяют соотношению (27). С их использованием функция (46) принимает вид (31). Также с их помощью можно найти коэффициент корреляции (36) и коэффициент сжатия (37).

На практике одним из методов генерации сжатых состояний является использование нелинейных процессов. В качестве примера рассмотрим процесс вырожденного параметрического преобразования частоты вниз (down-conversion). В этом процессе пучок света частотой ω_0 падает на нелинейный кристалл, и в результате взаимодействия фотон с частотой ω_0 распадается на два фотона частотой $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_0$. Обычно предполагают, что падающее поле накачки достаточно интенсивное, чтобы его можно было считать классическим, но рождающиеся фотоны должны рассматриваться квантовым образом. При таких предположениях гамильтониан взаимодействия имеет вид [19]

$$\hat{H} = \hbar\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar g(\hat{a}_1^{\dagger 2}v_0 e^{-2i\omega_1 t} + v_0^*\hat{a}_1^2 e^{2i\omega_1 t}). \quad (50)$$

Здесь ν_0 – комплексная амплитуда исходного светового луча, падающего на кристалл, а g – действительная константа связи, величина которой зависит от нелинейной восприимчивости среды. Уравнение движения Гейзенберга для оператора $\hat{a}(t)$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_1 = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_1, \hat{H}] = -i\omega_1\hat{a}_1 - 2ig\hat{a}_1^{\dagger 2}v_0 e^{-2i\omega_1 t}. \quad (51)$$

Общее решение уравнения (51) имеет вид

$$\hat{a}_1(t) = \hat{a}_1(0)ch(2g|v_0|t)e^{-i\omega_1 t} - $$
$$-i\frac{v_0}{|v_0|}\hat{a}_1^\dagger(0)sh(2g|v_0|t)e^{-i\omega_1 t},$$
$$\hat{a}_1^\dagger(t) = \hat{a}_1^\dagger(0)ch(2g|v_0|t)e^{i\omega_1 t} +$$
$$+i\frac{v_0^*}{|v_0|}\hat{a}_1(0)sh(2g|v_0|t)e^{i\omega_1 t}. \quad (52)$$

Сравнивая выражения (26) и (52), мы видим, что решения (52) также имеют вид преобразований Боголюбова. Поэтому в процессе вырожденного параметрического преобразования частоты вниз операторы рождения-уничтожения $\hat{a}_1^\dagger(t), \hat{a}_1(t)$ генерируемых фотонов эволюционируют таким образом, что вакуумное состояние $|0\rangle_1$, такое, что $|\hat{a}_1(0)\rangle_1 = 0$, в процессе эволюции преобразуется в сжатое состояние. Другие примеры нелинейных процессов, в том числе и невырожденного параметрического преобразования частоты вниз, которые также можно использовать для генерации сжатых состояний, можно найти в книге [20].

Установим теперь, какие значения принимают значения дисперсий координаты и импульса (34), и коэффициентов корреляции и сжатия (36),(37) для когерентного состояния (30), отвечающего операторам рождения-уничтожения $\hat{a}_1^\dagger(t), \hat{a}_1(t)$, заданных формулами (52).

В этом случае величины, задающие преобразование Боголюбова (26), имеют вид

$$u = ch(2g|d_0|t)e^{-i\omega_1 t},$$
$$v = -ie^{i\delta}sh(2g|d_0|t)e^{-i\omega_1 t};\ d_0 = |d_0|e^{i\delta}. \quad (53)$$

Им отвечают параметры (32)

$$\varphi = \varphi_u = -\omega_1 t,\ \theta = -\varphi_u - \varphi_\nu = -\delta + \pi/2,$$
$$\tau = \ln(|u| + |\nu|) = 2g|d_0|t. \quad (54)$$

Дисперсии (34) равны

$$\sigma_q(\beta) = \frac{\hbar}{2m\omega}[ch(4g|d_0|t) - sh(4g|d_0|t)\sin\delta],$$
$$\sigma_p(\beta) = \frac{m\omega\hbar}{2}[ch(4g|d_0|t) + sh(4g|d_0|t)\sin\delta]. \quad (55)$$

А коэффициенты корреляции и сжатия принимают вид

$$r = \frac{\cos\delta}{\sqrt{cth^2(4g|d_0|t) - \sin^2\delta}}, \quad (56)$$

$$k = \frac{cth(4g|d_0|t) - \sin\delta}{cth(4g|d_0|t) + \sin\delta}. \quad (57)$$

Из формул (55-57) видно, что с ростом времени t оба коэффициента, и корреляции, и сжатия, стремятся к единице ($r,\ k \to 1$). Таким образом, в данном процессе с ростом времени корреляция усиливается, дисперсии и неопределенность растут, а вот сжатие уменьшается. Область распределения канонических переменных расширяется и становится все более симметричной.

Мы рассмотрели простейшую схему генерации сжатых и коррелированных состояний, но существуют и другие нелинейные оптические процессы, которые тоже приводят к возникновению таких состояний [21]. Например, оказывается, что если нелинейную среду поместить в оптический резонатор, то процесс генерации сжатых и коррелированных состояний будет протекать более интенсивно. Также в качестве нелинейного процесса можно использовать четырехволновое смешение.

5. РАСТЯНУТЫЕ СОСТОЯНИЯ

В этом разделе мы рассмотрим новый подход к построению квантовых состояний, возникающих при тех или иных физических процессах.

Он был разработан в рамках сотрудничества между ФИАНом и Сербской академией наук и искусств. Основные идеи метода и полученные с его помощью результаты изложены в работах [22-27].

Метод основан на использовании квазивероятностных распределений для описания квантовых состояний. Эти распределения заданы на фазовом пространстве, а физическим процессам сопоставляются некоторые преобразования этого пространства. Преобразования фазового пространства индуцируют преобразования функций, которые заданы на них. Определяя физические состояния, которые соответствуют преобразованным квазивероятностным распределениям, можно найти результат действия физического процесса на исходное квантовое состояние.

Такова общая схема нашего подхода. В данной работе в роли квазивероятностных распределений используются функции Хусими, а в качестве физического процесса рассматривается усиление квантовых состояний. Этому процессу можно сопоставить масштабное преобразование фазового пространства.

В рамках данного подхода мы рассмотрим класс состояний, у которых величина дисперсии координаты и импульса зависит от параметров тех процессов, с помощью которых эти состояния генерируются. В этом отношении они схожи с коррелированными состояниями. Конкретно, мы будем рассматривать состояния, которые возникают, когда N-частичные фоковские состояния подвергаются действию квантового усилителя. Мы называем такие состояния растянутыми состояниями.

Растянутые состояния возникают при масштабном преобразовании фазового пространства

$$(q,p) \to (\lambda q, \lambda p);\ |\lambda|^2 \le 1. \qquad (58)$$

В работах [22, 23] было доказано, что если $Q(q,p)$ – функция Хусими квантового состояния и $\lambda < 1$, то и величина

$$Q_\lambda(q, p) = \lambda^2 Q(\lambda q, \lambda p) \qquad (59)$$

есть тоже функция Хусими некоторого квантового состояния.

Можно точно вычислить, что происходит с состояниями гармонического осциллятора при таком преобразовании. Если рассмотреть чистое состояние, являющееся произвольной суперпозицией n-частичных состояний, то в результате такого преобразования чистое состояние переходит в смешанное и можно найти явный вид его матрицы плотности. Это смешанное λ-состояние содержит бесконечный набор чистых состояний, и вероятности, с которыми эти чистые состояния входят в смешанное, образуют отрицательное биномиальное распределение. В том случае, когда изначально мы имеем дело с одним N-частичным состоянием, преобразованное λ-состояние содержит все N, N+1, ...-частичные состояния. При этом распределение этих чистых состояний в смешанном становится тем более гладким, чем меньше параметр λ^2. Условно говоря, можно считать, что при λ-преобразовании (58) из состояния $|N\rangle$ рождаются состояния с большими $M > N$. Мы называем такие смешанные состояния – «растянутыми состояниями». Для них найдены средние значения оператора числа частиц и вычислена энтропия фон Неймана. Также найден вид соотношений неопределенностей Гейзенберга и Робертсона-Шредингера для растянутых состояний. Установлено, что для таких состояний в правой части соотношений неопределенностей появляется множитель λ^{-4}, т.е. при выполнении λ-преобразования (58) неопределенность состояний возрастает.

Дадим определение функции Хусими. Пусть мы имеем некоторое квантовое состояние, которое определяется оператором плотности $\hat{\rho}$. Тогда с помощью когерентных состояний (20) можно построить его функцию Хусими

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi}\int \langle \alpha \mid x\rangle \rho(x,y) \langle y \mid \alpha\rangle dxdy. \qquad (60)$$

Если квантовое состояние является чистым и описывается волновой функцией $|\psi\rangle$, тогда его функция Хусими имеет вид

$$Q(q,p) = \langle \alpha \mid \psi\rangle \langle \psi \mid \alpha\rangle. \qquad (61)$$

Преобразование (58) можно связать с некоторыми физическими процессами, например, с прохождением состояния электромагнитного поля через квантовый усилитель [28, 29]. Основную идею можно понять на примере простейшего линейного усилителя света, состоящего из частично инвертированных двухуровневых атомов.

Резонансный гамильтониан взаимодействия поля с атомами имеет вид

$$\hat{H} = \hbar k \begin{pmatrix} 0 & \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \qquad (62)$$

Это гамильтониан взаимодействия модели Джейнса-Каммингса, он обладает рядом интересных свойств, в частности, свойством суперсимметрии [30, 31]. При таком гамильтониане уравнение для матрицы плотности $\hat{\rho}$ электромагнитного поля в первом приближении имеет вид [32]

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -kN_1(\hat{a}\hat{a}^\dagger \hat{\rho} - 2\hat{a}^\dagger \hat{\rho}\hat{a} + \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger) -$$
$$-kN_2(\hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho} - 2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \hat{\rho}\hat{a}^\dagger \hat{a}). \qquad (63)$$

Здесь $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ – операторы рождения-уничтожения электромагнитного поля, N_1, N_2 – заселенности верхнего и нижнего уровней двухуровневых атомов, k – коэффициент усиления.

Используя связь (60) между матрицей плотности и функцией Хусими, можно перейти от операторного уравнения (63) к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции Хусими. С помощью этого уравнения в работе [28] было получено выражение для функции Хусими для состояния на выходе из квантового усилителя. Оно имеет вид

$$Q_{out}(\alpha, t) = \frac{1}{G^2} Q_{in}(\alpha / G) = \left\langle \frac{\alpha}{G} | \hat{\rho}_{in} | \frac{\alpha}{G} \right\rangle, \qquad (64)$$

где

$$G(t) = \exp[2(N_1 - N_2)kt]. \qquad (65)$$

Мы видим, что выражение (64) совпадает с (59) при $\lambda = G^{-1}$. Таким образом, масштабное преобразование фазового пространства (58) оказывается связанным с действием квантового усилителя, и вид этого преобразования определяется структурой гамильтониана (62). Соответственно и действие усилителя на произвольное квантовое состояние можно описать с помощью масштабного преобразования фазового пространства.

Покажем, какой вид принимают соотношения неопределенностей Гейзенберга и Робертсона-Шредингера для растянутых состояний. В работах [24, 25] был предложен новый способ построения символов Хусими. Он оказывается особенно эффективным, когда оператор имеет вид полинома по операторам координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p}$. Именно с такими операторами мы будем иметь дело в данном разделе.

Рассмотрим сначала гамильтониан гармонического осциллятора

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{q}^2 + \hat{p}^2). \qquad (66)$$

Его символ Хусими $K_H(q, p)$ имеет вид

$$K_H(q, p) = q^2 + p^2 - 1. \qquad (67)$$

Среднее значение энергии $\bar{E}$ состояния, которое характеризуется функцией Хусими $Q(q, p)$, имеет вид

$$\bar{E} = \int \frac{\hbar\omega}{2}(q^2 + p^2 - 1) Q(q, p) dq dp =$$
$$= \int \frac{\hbar\omega}{2}(q^2 + p^2) Q(q, p) dq dp - \frac{\hbar\omega}{2}. \qquad (68)$$

Найдем теперь среднее значение энергии растянутого состояния, которое соответствует состоянию с функцией Хусими $Q(q, p)$. Функция Хусими растянутого состояния имеет вид $Q_\lambda(q, p) = \lambda^2 Q(\lambda q, \lambda p)$, и среднее значение энергии $\bar{E}_\lambda$ состояния с такой функцией Хусими определяется по формуле

$$\bar{E}_\lambda = \int K_H(q, p) Q_\lambda(q, p) dq dp =$$
$$= \int \frac{1}{\lambda^2} \frac{\hbar\omega}{2}((\lambda q)^2 + (\lambda p)^2 - 1) Q(\lambda q, \lambda p) d(\lambda q) d(\lambda p) =$$
$$= \frac{1}{\lambda^2} \bar{E} + \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \frac{\hbar\omega}{2}. \qquad (69)$$

Выражение (69) справедливо для всех растянутых состояний гармонического осциллятора. Поскольку $|\lambda|^2 < 1$, из него видно, что при масштабном преобразовании энергия растянутых состояний возрастает. Для фоковских состояний среднее значение энергии соответствующих растянутых состояний можно найти в явном виде. Так, в случае произвольной суперпозиции фоковских состояний мы имеем

$$\bar{E}_{\Sigma\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\hbar\omega}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \, k + \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \frac{\hbar\omega}{2}. \qquad (70)$$

Используя выражение для средних значений операторов, использующее функции Хусими состояний, можно установить, какую форму приобретают соотношения неопределенностей для растянутых состояний. Мы будем рассматривать соотношения неопределенностей Гейзенберга и Робертсона-Шредингера. Соотношения (5),(8) выполняются для любых квантовых состояний. Установим теперь, что происходит с этими соотношениями, когда мы переходим к растянутым состояниям. Для этого нужно вычислить величины

$$\sigma_{qq} = \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2, \sigma_{pp} = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2,$$
$$\sigma_{qp} = \frac{1}{2}\langle \hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p} \rangle - \langle \hat{q} \rangle \langle \hat{p} \rangle. \quad (71)$$

Используя функцию Хусими, дисперсии σ_{qq}, σ_{pp} и величину σ_{qp} можно записать в виде

$$\sigma_{qq} = \int \left(q^2 - \frac{1}{2} \right) Q(q,p)dqdp - \left(\int qQ(q,p)dqdp \right)^2,$$
$$\sigma_{pp} = \int \left(p^2 - \frac{1}{2} \right) Q(q,p)dqdp - \left(\int pQ(q,p)dqdp \right)^2,$$
$$\sigma_{qp} = \int qpQ(q,p)dqdp - \int qQ(q,p)dqdp \int qQ(q,p)dqdp. \quad (72)$$

Для растянутых состояний формулы (72) принимают вид

$$\sigma_{qq\lambda} = \int \left(q^2 - \frac{1}{2} \right) \lambda^2 Q(\lambda q, \lambda p)dqdp - \left(\int q\lambda^2 Q(\lambda q, \lambda p)dqdp \right)^2,$$
$$\sigma_{pp\lambda} = \int \left(p^2 - \frac{1}{2} \right) \lambda^2 Q(\lambda q, \lambda p)dqdp - \left(\int p\lambda^2 Q(\lambda q, \lambda p)dqdp \right)^2,$$
$$\sigma_{qp\lambda} = \int qp\lambda^2 Q(\lambda q, \lambda p)dqdp -$$
$$- \int q\lambda^2 Q(\lambda q, \lambda p)dqdp \int p\lambda^2 Q(\lambda q, \lambda p)dqdp. \quad (73)$$

Формулы (73) дают значения величин σ_{qq}, σ_{pp}, σ_{qp} для растянутых состояний:

$$\sigma_{qq\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\sigma_{qq} + \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}, \sigma_{pp\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\sigma_{pp} + \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}, \sigma_{qp\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\sigma_{qp}. \quad (74)$$

Используя эти выражения, находим, как модифицируются соотношения неопределенностей Гейзенберга и Робертсона-Шредингера при переходе к растянутым состояниям.

$$\sigma_{qq\lambda}\sigma_{pp\lambda} =$$
$$= \frac{1}{\lambda^4}(\sigma_{qq}\sigma_{pp} + \frac{1}{2}(1-\lambda^2)(\sigma_{qq} + \sigma_{pp}) + \frac{1}{4}(1-\lambda^2)^2) \geq \frac{1}{4\lambda^4}\hbar^2, \quad (75)$$

и

$$\sigma_{qq\lambda}\sigma_{pp\lambda} - \sigma_{qp\lambda}^2 =$$
$$= \frac{1}{\lambda^4}(\sigma_{qq}\sigma_{pp} - \sigma_{qp}^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda^2)(\sigma_{qq} + \sigma_{pp}) + \frac{1}{4}(1-\lambda^2)^2) \geq \frac{1}{4\lambda^4}\hbar^2.$$

Мы видим, что правые части соотношения неопределенностей (75) содержат сомножитель λ^{-4}, поэтому при $\lambda < 1$ их величина возрастает и, вообще говоря, может стать сколь угодно большой. В этом отношении они проявляют сходство с коррелированными состояниями. Так же, как и для коррелированных состояний можно считать, что масштабное преобразование $(q, p) \to (\lambda q, \lambda p)$ приводит к возникновению "эффективной постоянной Планка" $\hbar_{\text{eff}} = \hbar/\lambda^2$. Для $\lambda^2 << 1$ эффективная постоянная Планка удовлетворяет неравенству $\hbar_{eff} \gg \hbar$

Однако, между этими двумя типами состояний есть и существенная разница: коррелированные состояния – это чистые состояния, а растянутые состояния – смешанные состояния. Матрицы плотности этих смешанных состояний были найдены в работах [26, 27].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье дан краткий обзор двух типов состояний: коррелированных и растянутых. Как те, так и другие могут обладать и обладают большой неопределенностью по координате и импульсу, и для них левая часть соотношений неопределенностей Гейзенберга и Робертсона-Шредингера может принимать значения, значительно превышающие минимальное значение $\hbar^2/4$. Эти состояния получаются из состояний гармонического осциллятора с помощью нелинейных процессов или внешнего энергетического воздействия. В том случае, когда эти условия реализуются в атомном ядре, возникновение состояний с большими значениями дисперсий координаты и импульса могут повысить вероятность туннельного эффекта и привести к низкоэнергетическим ядерным реакциям. Формально увеличение вероятности туннельного перехода можно соотнести с "увеличением" постоянной Планка $\hbar$, т.е. с возможностью использовать вместо нее величины $\hbar_{eff} \gg \hbar$.

В работах [15-17, 33] это свойство коррелированных состояний было предложено использовать для описания низкоэнергетических ядерных реакций. Растянутые состояния тоже обладают большой неопределенностью, но возникают в других физических процессах. Мы надеемся, что их использование также найдет свое применение в ядерной физике и других областях, где наблюдается увеличение вероятности туннельного эффекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высоцкий ВИ, Корнилова АА. *Ядерный синтез и трансмутация изотопов в биологических системах*. Москва, Мир, 2003, 302 с., ISBN 5-03-003647-4 OCLC 67158435.
2. Ратис ЮЛ. Управляемый «термояд» или холодный синтез? Драма идей. www.electrosad.ru›files/LENR/cold.pdf.
3. LENR или не LENR? www.geektimes.ru›post/275724/.
4. Жигалов В. Русская мозаика LENR electrosad.ru›files/LENR/Zhigalov Vlad…LENR…pdf.
5. LENR – «холодный синтез» или «эффект... genveles.livejournal.com›213196.html.
6. В защиту холодного ядерного синтеза (ХЯС) ss69100.livejournal.com›ХЯС.
7. Зельдович ЯБ, Герштейн СС. Ядерные реакции в холодном водороде. *УФН*, 1960, 71(4):581-630.
8. Додонов ВВ, Манько ВИ. Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем. *Труды Физического института им. П.Н. Лебедева*, т. 183, Москва, Наука, 1987.
9. Heisenberg W. Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Ztschr. Phys.*, 1927, 43:172-198.
10. Robertson HP. A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation. *Phys. Rev. A*, 1930, 35(5):667.
11. Schrödinger E. Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip. *Ber. Kgr. Akad. Wiss.*, Berlin, 1930, 24:296-303.
12. Dodonov VV, Dodonov AV. Transmission of correlated Gaussian packets through a delta-potential. *J. Russ. Laser Res.*, 2014, 35(1):39-46.
13. Dodonov AV, Dodonov VV. Tunneling of slow quantum packets throw the high Coulomb barrier. *Physics Letters A,* 2014, 378:1071-1073.
14. Воронцов ЮИ. Соотношение неопределенности и соотношение ошибка измерения-возмущение. *УФН*, 2005, 175(10):1053-1068.
15. Высоцкий ВИ, Высоцкий МВ, Адаменко СВ. Особенности формирования и применения коррелированных состояний в нестационарных системах при низкой энергии взаимодействующих частиц. Формирование коррелированных состояний и увеличение прозрачности барьера при низкой энергии частиц. *ЖЭТФ*, 2012, 141(2):276-287.
16. Высоцкий ВИ, Адаменко СВ, Высоцкий МВ. Формирование коррелированных состояний и увеличение прозрачности барьера при низкой энергии частиц в нестационарных системах с демпфированием и флуктуациями. *ЖЭТФ*, 2012, 142, 4(10):627-643.
17. Высоцкий ВИ, Высоцкий МВ. Формирование коррелированных состояний и оптимизация ядерных реакций для частиц низкой энергии при нерезонансной низкочастотной модуляции потенциальной ямы. *ЖЭТФ,* 2015, 147, 2:279-291.
18. Быков ВП. Основные особенности сжатого света. *УФН*, 1991, 161(10):145-173.
19. Mandel L., Wolf E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995 (Перевод: Мандель Л, Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. Москва, Физматлит, 2003, 896 с.).
20. Yariv A. *Quantum Electronics.* John Sons, Inc. 1975; (Перевод: Ярив А. Квантовая Электроника. Москва, Советское радио, 1980, 488 с.).
21. Scully MO, Zubairy MS. *Quantum Optics.* Cambridge University Press, 1997; (Перевод: Скалли МО, Зубайри МС. *Квантовая оптика.* Москва, Физматлит, 2003, 510 с.).
22. Андреев ВА, Давидович ДМ, Давидович ЛД, Давидович МД, Манько ВИ, Манько МА. Трансформационное свойство функции Хусими и ее связь с функцией Вигнера и томограммами. *Теоретическая и математическая физика,* 2011, 166(3):410.
23. Andreev VA, Davidovich DM, Davidovich LD, Davidovich MD. Relationships between scaling transformed Husimi functions and symplectic tomograms describing corresponding physical states. *Phys. Scr.*, 2011, 143:01400.
24. Андреев ВА, Давидович ЛД, Давидович Милена Д, Давидович Милош Д, Манько ВИ, Манько МА. Операторный метод вычисления Q-символов и их связь с символами Вейля-Вигнера и символами симплектических томограмм. *Теоретическая и математическая физика*, 2014, 179(2):207-224.
25. Andreev VA, Davidović Milena D, Davidović LD, Davidović Miloš D and Davidović DM. Derivation of the Husimi symbols without

antinormal ordering, scale transformation and uncertainty relations. *Physica Scripta*, 2015, 90(7):074023.

26. Vladimir A. Andreev, Dragomir M. Davidovi´c, Ljubica D. Davidovi´c, Milena D. Davidovi´c, Miloˇs D. Davidovi´c, and Sergey D. Zotov, Scaling transform and stretched states in quantum mechanics. *J. Russ. Laser Res.*, 2016, 37(5):434-439.
27. Андреев ВА, Давидович ДМ, Давидович ЛД, Давидович Милена Д, Давидович Милош Д. Преобразования масштаба фазового пространства и растянутые состояния гармонического осциллятора. Т*еоретическая и математическая физика*, 2017, 192(1):164-184.
28. Agarwal GS, Tara K. Transformation of the nonclassical states by an optical amplifier. *Phys. Rev. A,* 1993, 47(4):3160-3166.
29. Agarwal GS, Chaturvedi S, and Rai Amit. Amplification of NOON States, http://arxiv.org/abs/0912.5134v1.
30. Andreev VA, and Lerner PB. Supersymmetry in the Jaynes-Cummings Model. *Physics Letters A*, 1989, 134:507-511.
31. Andreev VA. Supersymmetry of two-level systems. *J. Sov. Laser Res.*, 1992, 13:268-278.
32. Schleich WP. *Quantum Optics in Phase Space.* WILEY-VCY, 2001; (Перевод: Шляйх ВП. *Квантовая оптика в фазовом пространстве.* Москва, Физматлит, 2005, 758 с.).
33. Chernega VN. Purity-dependent uncertainty relations and a possible enhancement of the quantum tunneling phenomenon. *J. Russ. Laser Res.,* 2013, 34(2):168-174; http://arxiv.org/abs/1303.5238v1(2013).

Андреев Владимир Андреевич
к.ф.-м.н., с.н.с.
Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН
53, Ленинский пр., Москва 119991, Россия
andrvlad@yandex.ru

HARMONIC OSCILLATOR AND RELATED STATES WITH LARGE VALUE OF UNCERTAINTY

Vladimir A. Andreev
P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, http://www.lebedev.ru
Moscow 119991, Russian Federation
andrvlad@yandex.ru

Abstract. **A review is given of the properties of two types of quantum states, which have great uncertainty in the coordinate and momentum. Both are obtained from the states of a harmonic oscillator by means of certain transformations. The first type is correlated states, they are obtained from coherent states with a help of the Bogolyubov transform. The variances of the coordinate and momentum of such a state depend on the Bogolyubov transform parameters and can, in general, take arbitrarily large values. Their specific values are determined by the physical processes with which the Bogolyubov transform is realized. A concrete example of such physical process is considered. Another type are stretched states. Formally, they arise when the n-partial state of a harmonic oscillator undergoes a transform associated with a scale transformation of the phase space. The dispersion of the coordinate and momentum of these states depends on the scale transformation parameter and can also take arbitrarily large values. Physically stretched states can be obtained by passing n-photon states through a quantum amplifier. The role of the scale transformation of the phase space is played by the gain of the quantum amplifier.**

Keywords: **harmonic oscillator, correlated states, compressed states, stretched states, uncertainty relations, Planck constant**

PACS 03.65.−w, 23.20.Lv
Bibliography – 33 references
Received 22.04.2017
RENSIT, 2017, 9(1):8-20
DOI: 10.17725/rensit.2017.09.008