

# МЕТОД ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Булычев Г. Г.

МИРЭА-Российский технологический университет, <https://www.mirea.ru/>

Москва 119454, Российская Федерация

Поступила в редакцию 19.04.2018

Представлена членом-корреспондентом РАН и РАЕН Петровым И.Б.

Рассматривается и анализируется метод пространственных характеристик, изучаются его возможности для исследования волновых процессов в деформируемых твердых телах различной структуры и реологии. Рассматриваются достоинства и недостатки метода, а также определяется круг задач, которые необходимо решить для построения характеристической формы математической модели динамики и динамического разрушения исследуемых тел, ее численной реализации и моделирования на ПЭВМ. Приводится исходная и характеристическая форма уравнений динамики анизотропных симметрично упругих тел. Методом численного моделирования на ПЭВМ решается задача исследования разрушения двухэтажного дома при сейсмической нагрузке. Моделирование проводится на ПЭВМ с процессором FX8350 и оперативной памятью 4 Гб.

*Ключевые слова:* динамические процессы, метод пространственных характеристик, численное моделирование, динамика и разрушение строительных сооружений и конструкций

УДК 539.3

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ (77)
2. ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ (78)
3. ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ (80)
4. ЭТАПЫ РАЗРАБОТКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА (81)
  - 4.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ ДОМА ПРИ ДЕЙСТВИИ СЕЙСМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ (83)
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ (89)

## ЛИТЕРАТУРА (89)

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Метод пространственных характеристик (МПХ) предполагает построение и дальнейшее использование характеристической формы исходных уравнений динамики деформируемых твердых тел, то есть такой формы, при которой исходные уравнения преобразуются к виду, содержащему уравнения для волн, распространяющихся в теле, и вырожденных

волн, характеризующих нераспространяющиеся возмущения (они называются неподвижными разрывами). Первичная словесная формулировка такого представления была дана Х. Гюйгенсом («Трактат о свете», 1678 г.) и звучала примерно так: «Освещенность тела в точке определяется суммой волн, приходящих в эту точку, и источниками, находящимися в этой точке». Математическая формулировка этого утверждения была получена спустя 70 лет Д'Аламбером, как общее решение волнового уравнения (формула Д'Аламбера) и получила название характеристической формы, а метод, использующий эту форму представления стал называться методом характеристик (для одномерных динамических задач) и, позднее, методом пространственных характеристик (МПХ) для многомерных задач. МПХ с успехом использовался для решения линейных и нелинейных задач динамики газов и жидкостей. Начиная с пятидесятых годов 20 века этим методом стали исследовать динамику деформируемых твердых тел.

К одной из первых работ в этой области следует отнести [1], где для построения характеристической формы системы гиперболических уравнений был предложен матричный аппарат и процедура диагонализации симметричных, положительно

определенных матриц.

Численные аспекты МПХ разрабатывались К.М. Магомедовым и А.С. Холодовым для уравнений типа переноса [5]. На основе сравнительного анализа различных разностных схем ими было показано, что область зависимости конечноразностных характеристических схем наиболее близка к области зависимости исходных дифференциальных уравнений, то есть точность вычислений с использованием характеристических схем выше, чем с использованием сеточных. Кроме того, оказалось, что при первом порядке аппроксимации (односторонняя разность по времени и симметричная разность по координате) характеристические конечноразностные схемы обладают остаточным членом параболического типа, что делает их устойчивыми при моделировании как гладких, так и разрывных возмущений. Оказалось также, что разностно-характеристические схемы первого порядка не создают вычислительную «рябь», приводящие сеточные схемы в тех же случаях к осцилляторной неустойчивости. Школа К.М. Магомедова и А.С. Холодова существует и развивается до сих пор [3, 4, 5, 6] и с помощью сеточно-характеристических методов решено множество практически важных задач газовой и гидродинамики, физики плазмы и механики деформированного твердого тела (МДТТ). В задачах МДТТ использовались, в основном, обратные неявные сеточно-характеристические схемы первого и второго порядка аппроксимации. При втором порядке аппроксимации в целях устойчивости счёта вводилась искусственная вязкость. С помощью таких схем рассматривались малые и конечные деформации однородных, кусочно-однородных и неоднородных тел, а также разрушение таких тел.

В 1990 году автором был построен математический аппарат, позволивший аналитически в явном виде получить характеристическую форму анизотропных упруговязкопластических тел с симметричной матрицей жесткости [7]. Таким образом характеристическое представление для большого класса деформируемых твердых тел в рамках малых деформаций (дифференциальная часть исходных уравнений должна быть линейной) было получено.

Любопытными оказались два момента:  
1) примененный аппарат может быть

использован для построения характеристической формы уравнений динамики любых сред – газа, жидкости, плазмы и твердого тела – в том случае, если дифференциальные части их уравнений описываются дифференциальными инвариантами первого порядка, и 2) для решения этой задачи не понадобилось ни тензорное исчисление, ни определение собственных значений и собственных векторов матриц, порядок которых превышал бы третий. Таким образом на этом этапе удалось обойтись аналитическими, причем тождественными преобразованиями. Применительно к такой (характеристической) форме представления исходных уравнений динамики автором был разработан численный метод, который используется для решения задач строительной механики, одна из которых в качестве примера рассмотрена в настоящей работе.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Построим матричную форму дифференциальных инвариантов первого порядка, для чего введём в рассмотрение скаляр –  $\varphi$ , вектор –  $\vec{V}$ , симметричный тензор –  $\hat{\sigma}$ . Введем, для простоты декартову систему координат  $\{x_i\}$  и представим вектор и тензор в виде матриц-строк их физических компонент:

$$V = \parallel V_1, V_2, V_3 \parallel, \Sigma = \parallel \Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}, \Sigma_{12}, \Sigma_{13}, \Sigma_{23} \parallel \quad (1)$$

Для выделения компонентов из этих матриц-строк используем простейшие матрицы-строки  $e_i = \parallel \delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i} \parallel$ , где  $\delta_{ij}$  – единичный тензор, и  $r_{ij} = \parallel \delta_{1i}\delta_{1j}, \delta_{2i}\delta_{2j}, \delta_{3i}\delta_{3j}, \delta_{1i}\delta_{2j} + \delta_{2i}\delta_{1j}, \delta_{1i}\delta_{3j} + \delta_{3i}\delta_{1j}, \delta_{2i}\delta_{3j} + \delta_{3i}\delta_{2j} \parallel$ , с помощью которых из матриц-строк (1) можно выделять элементы:  $V_i = e_i V^T$ ,  $\Sigma_{ij} = r_{ij} \Sigma^T$ , где верхний индекс  $T$  обозначает транспонирование.

Для выбранных объектов составим дифференциальные инварианты,

$$div \sigma = (R_i \partial_j) \Sigma^T, \quad def \vec{V} = (\Pi R_i^T \partial_i) V^T, \quad (2)$$

где  $\partial_i = \partial / \partial x_i$ , по повторяющимся римским индексам здесь и далее проводится суммирование,  $def$  – оператор деформаций,  $\Pi = diag(1, 1, 1, 1/2, 1/2, 1/2)$ ,

$$R_i = e_j^T r_{ij} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & 0 & 0 & \delta_{2i} & \delta_{3i} & 0 \\ 0 & \delta_{2i} & 0 & \delta_{1i} & 0 & \delta_{3i} \\ 0 & 0 & \delta_{3i} & 0 & \delta_{1i} & \delta_{2i} \end{vmatrix}.$$

Легко заметить, что матрицы  $e_i$  и  $R_i$  имеют весьма простой вид, но именно они определяют топологию волновых процессов в симметрично упругом твёрдом теле, как циклического порождения одних величин другими: напряжения-перемещения-деформации-напряжения. Любопытно, что переход к ортогональной криволинейной системе координат не увеличивает число элементарных матриц и также позволяет проводить указанные ниже аналитические преобразования.

Используем соотношения (2) для построения характеристической формы уравнений динамики симметрично-упругого упруговязкопластического тела. Исходную систему уравнений запишем в виде уравнений движения, условий аддитивности деформаций, закона Гука для упругих деформаций, соотношений Коши для упругих деформаций и закона пластического течения

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{\sigma} + \vec{f} &= \rho \partial_t \vec{V}, \quad \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^e + \hat{\varepsilon}^{vp}, \quad \hat{\sigma} = \hat{c} \cdot \hat{\varepsilon}^e, \\ \partial_t \hat{\varepsilon} &= \operatorname{def} \vec{V}, \quad \partial_t \hat{\varepsilon}^{vp} = \hat{\Phi}(\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}^e, \hat{\varepsilon}^{vp}, \hat{\sigma}, \vec{V}, \eta). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\vec{f} = \|\|F_1, F_2, F_3\|\|$  – вектор внутренних сил,  $\rho$  – плотность материала тела,  $\hat{\sigma}$  – тензор напряжений,  $\vec{V}$  – вектор скоростей частиц тела,  $\hat{\varepsilon}$ ,  $\hat{\varepsilon}^e$  и  $\hat{\varepsilon}^{vp}$  – полная, упругая и вязкопластическая деформации,  $\hat{c}$  – тензор жесткости,  $\hat{\Phi} = \|\| \Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33}, \Phi_{12}, \Phi_{13}, \Phi_{23} \|\|$  – тензор вязкопластических деформаций (существенно, что он не зависит от производных  $\hat{\sigma}$  и  $\vec{V}$ ),  $\partial_t = \partial/\partial t$ .

Видно, что в системе (3) два дифференциальных инварианта – дивергенция (*div*) и деформация (*def*), топология которых определяется матрицами  $R_i$ .

Относительно матричных переменных  $V$  и  $\Sigma$  в системе координат  $\{x_i\}$  систему (3) можно привести в двум группам уравнений: уравнения движения и определяющие уравнения

$$\begin{aligned} R_i \partial_i \Sigma^T - \rho \partial_t V^T &= F^T, \\ \partial_t \Sigma^T &= C(\Pi R_i^T \partial_i V^T - \Phi^T), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $C$  – матрица жесткостей,  $F$  и  $\Phi$  – матрицы-строки внутренних сил и скоростей вязкопластических деформаций.

Выберем направление  $x_a$ , совпадающее с одной из осей координатной системы  $\{x_i\}$  и построим характеристические уравнения для волн, распространяющихся в обе стороны

вдоль этого направления. Остальные оси назовём, соответственно,  $x_\beta$  и  $x_\gamma$ ; напряжения, действующие на площадках с нормальми, соответствующими этим осям  $R_a \Sigma^T$ ,  $R_\beta \Sigma^T$ ,  $R_\gamma \Sigma^T$  обозначим, соответственно,  $\Sigma_\alpha^T$ ,  $\Sigma_\beta^T$  и  $\Sigma_\gamma^T$ . Матрицу СП обозначим  $\tilde{C}$  и перепишем (4) в виде

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \Sigma_\alpha^T - \rho \partial_t V^T &= F^T - \partial_\beta \Sigma_\beta^T - \partial_\gamma \Sigma_\gamma^T, \\ \partial_t \Sigma^T &= \tilde{C} R_i^T \partial_i V^T - C \Phi^T. \end{aligned} \quad (5)$$

Умножим второе уравнение системы (5) слева на  $R_a$  и введем обозначения  $\tilde{C}_{\alpha\alpha} = R_a \tilde{C} R_a^T$ ,  $\tilde{C}_{\alpha\beta} = R_a \tilde{C} R_\beta^T$ ,  $\tilde{C}_{\alpha\gamma} = R_a \tilde{C} R_\gamma^T$  и  $R_a C \tilde{\Phi}^T = \Psi_\alpha^T$ ; при этом второе уравнение (5) приводится к виду

$$\partial_t \Sigma_\alpha^T - \tilde{C}_{\alpha\alpha} \partial_\alpha V^T = \tilde{C}_{\alpha\beta} \partial_\beta V^T + \tilde{C}_{\alpha\gamma} \partial_\gamma V^T - \Psi_\alpha^T. \quad (6)$$

Рассмотрим матрицу  $\tilde{C}_{\alpha\alpha}$ , которая является главным минором третьего порядка матрицы  $\tilde{C}$ . Матрица  $\tilde{C}$  всегда невырождена, положительно определена и симметрична по построению, следовательно, матрица  $\tilde{C}_{\alpha\alpha}$  имеет диагональное разложение:  $\tilde{C}_{\alpha\alpha} = O^T \Lambda O$ , где  $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – диагональная матрица с положительными собственными числами (пусть  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3$ , что всегда возможно, если все элементы  $\tilde{C}_{\alpha\alpha}$  положительны), а матрицы собственных векторов  $O$  – ортонормированы и являются матрицами поворота в координатной системе  $\{x_i\}$ .

Примем  $\Lambda = \rho D^2$ , откуда  $D = \pm \sqrt{\Lambda/\rho}$  – имеет размерность скорости и, как будет видно из дальнейшего, является матрицей продольных и поперечных волн, распространяющихся в обоих направлениях вдоль оси  $x_a$ .

Умножим первое уравнение (5) слева на  $|D| O$ , уравнение (6) слева на  $O$ , сложим эти уравнения и заменим  $|D|$  на  $\pm D$ . После группировки получим матричные характеристические уравнения

$$\begin{aligned} (\partial_t \pm D \partial_\alpha)(O \Sigma_\alpha^T \mp \rho D O V^T) &= \\ \partial_\beta (O \tilde{C}_{\alpha\beta} V^T \mp D O \Sigma_\beta^T) &+ \\ + \partial_\gamma (O \tilde{C}_{\alpha\gamma} V^T \mp D O \Sigma_\gamma^T) \pm D O F^T - O \Psi_\alpha^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть численные расчеты уравнений (7) приводят к формулам

$$O \Sigma_\alpha^T - \rho D O V^T = \Omega_1, \quad O \Sigma_\alpha^T + \rho D O V^T = \Omega_2, \quad (8)$$

тогда

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha^T &= O^T (\Omega_1 + \Omega_2) / 2, \\ V^T &= O^T D^{-1} (\Omega_2 - \Omega_1) / (2\rho) \end{aligned}$$

и шесть из девяти определяемых величин оказываются найденными (численно).

Для определения остальных напряжений введём матрицу  $N_a$ , полученную вычеркиванием из единичной матрицы шестого порядка строк, соответствующих матрице  $R_a$ . Тогда, по построению,  $\Sigma_N^T = N_a \Sigma^T$  – те напряжения, которые осталось вычислить.

Умножим второе уравнение (5) слева на  $N_a$  и выразим  $\partial_a V^T$  из (6); в результате после группировки получим матричное вырожденное характеристическое уравнение, определяющее последние три напряжения  $\Sigma_N^T$

$$\partial_t (\Sigma_N^T - \tilde{C}_{Na} \tilde{C}_{aa}^{-1} \Sigma_a^T) = (\tilde{C}_{N\beta} - \tilde{C}_{Na} \tilde{C}_{aa}^{-1} \tilde{C}_{a\beta}) \partial_\beta V^T + (\tilde{C}_{N\gamma} - \tilde{C}_{Na} \tilde{C}_{aa}^{-1} \tilde{C}_{a\gamma}) \partial_\gamma V^T + \tilde{C}_{Na} \tilde{C}_{aa}^{-1} \Psi_a^T - \Psi_N^T. \quad (9)$$

Здесь обозначено:

$$\tilde{C}_{Na} = N_a \tilde{C} R_a^T, \quad \tilde{C}_{N\beta} = N_a \tilde{C} R_\beta^T,$$

$$\tilde{C}_{N\gamma} = N_a \tilde{C} R_\gamma^T, \quad \Psi_N^T = N_a C \tilde{\Phi}^T.$$

Большинство материалов, используемых в промышленности и строительстве, являются изотропными, трансверсально-изотропными или ортотропными. Для таких материалов матрица  $\tilde{C}$  имеет вид

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (10)$$

и  $\tilde{C}_{11} = \text{diag}(c_{11}, c_{44}, c_{55})$ ,  $\tilde{C}_{22} = \text{diag}(c_{44}, c_{22}, c_{66})$ ,  $\tilde{C}_{33} = \text{diag}(c_{55}, c_{66}, c_{33})$ , а следовательно, собственными векторами являются единичные матрицы третьего порядка и уравнения (7) и (9) распадаются на 9 скалярных уравнений

$$\begin{aligned} & (\partial_\alpha \mp c_1^{-1} \partial_t) (\Sigma_{\alpha\alpha} \pm \rho c_1 V_\alpha) + \partial_j (\Sigma_{\alpha j} \pm v_1 \rho c_1 V_j) + \\ & + \partial_k (\Sigma_{\alpha k} \pm v_2 \rho c_1 V_k) = \tilde{F}_\alpha \pm \rho c_1 (\Phi_{\alpha\alpha} + v_1 \Phi_{jj} + v_2 \Phi_{kk}), \\ & (\partial_\alpha \mp c_2^{-1} \partial_t) (\Sigma_{\alpha j} \pm \rho c_2 V_j) + \partial_j (\Sigma_{jj} \pm \rho c_2 V_\alpha) + \\ & + \partial_k \Sigma_{jk} = F_j \pm 2 \rho c_2 \Phi_{\alpha j}, \\ & (\partial_\alpha \mp c_3^{-1} \partial_t) (\Sigma_{\alpha k} \pm \rho c_3 V_k) + \partial_k (\Sigma_{kk} \pm \rho c_3 V_\alpha) + \\ & + \partial_j \Sigma_{jk} = F_k \pm \rho c_3 \Phi_{\alpha k}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\partial_t (\Sigma_{jj} - v_1 \Sigma_{\alpha\alpha}) = \eta_1 (\partial_j V_j - \Phi_{jj}) + \eta_2 (\partial_k V_k - \Phi_{kk}),$$

$$\partial_t (\Sigma_{kk} - v_2 \Sigma_{\alpha\alpha}) = \eta_2 (\partial_j V_j - \Phi_{jj}) + \eta_3 (\partial_k V_k - \Phi_{kk}),$$

$$\partial_t \Sigma_{jk} = c_{\chi\chi} (\partial_j V_k + \partial_k V_j - \Phi_{jk}), \quad \alpha, j, k = 1, 2, 3;$$

где  $j \neq a, k \neq a, j < k, \beta = a + j + 1, \gamma = a + k + 1, \chi = j + k + 1$ ,  $c_1 = \sqrt{c_{\alpha\alpha} / \rho}$ ,  $c_2 = \sqrt{c_{\beta\beta} / \rho}$ ,  $c_3 = \sqrt{c_{\gamma\gamma} / \rho}$ ,  $v_1 = c_{\alpha j} / c_{\alpha\alpha}$ ,  $v_2 = c_{\alpha k} / c_{\alpha\alpha}$ ,  $\eta_1 = c_{jj} - v_1^2 c_{\alpha\alpha}$ ,  $\eta_2 = c_{kj} - v_1 v_2 c_{\alpha\alpha}$ ,  $\eta_3 = c_{kk} - v_2^2 c_{\alpha\alpha}$ ,  $F_i$  и  $\Phi_{ij}$  – физические компоненты вектора внутренних сил и аналогичные компоненты тензора вязкопластических деформаций.

Первые три пары уравнений (11) описывают волновые процессы на движущихся разрывах, то есть для волн, распространяющихся в направлении  $x_a$  декартовой системы координат  $\{x_j\}$ ; в каждой паре вдоль бихарактеристик изменяются по две определяемых переменных и, следовательно, эти переменные могут быть определены независимо от остальных.

Три последних уравнения системы (11) независимо друг от друга определяют три напряжения  $\Sigma_{jj}$ ,  $\Sigma_{kk}$  и  $\Sigma_{jk}$  по определённому из первой пары уравнений напряжению  $\Sigma_{\alpha\alpha}$ . Таким образом, характеристическая система уравнений (11) позволяет определить все напряжения и скорости частиц во внутренней точке рассматриваемой среды для волн, распространяющихся в обе стороны вдоль оси  $x_a$ .

### 3. ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

Являясь обобщением метода характеристик, МПХ обладает всеми его достоинствами: 1) в характеристических уравнениях, по сравнению с исходными на единицу уменьшено число независимых переменных, 2) вдоль характеристики изменяются только две переменные: напряжение и вызванная им скорость частиц, то есть уравнения оказываются связанными попарно для волн, распространяющихся вдоль одной оси, но в противоположных направлениях, 3) уравнения имеют дивергентный вид, что позволяет при составлении алгоритмов использовать не только сеточно-характеристические схемы, но и интегральные теоремы (Стокса в двумерных задачах и Гаусса-Остроградского в трёхмерных задачах) и сохранять свойство консервативности в конечно-разностных схемах.

С точки зрения численной реализации эти достоинства позволяют:



1. Существенно сблизить области зависимости исходных дифференциальных уравнений и их конечноразностных аналогов, тем самым резко повышая точность вычислений (особенно при моделировании волновой динамики и волнового разрушения).
2. Резко сократить время счета и необходимый объем оперативной памяти.
3. Точно передавать скачки решений и отслеживать изменение условий на разрывах (трещинах, неоднородностях, границах раздела сред и т.д.) вплоть до полного разрушения элемента или конструкции.
4. Сохранять консервативность незатухающих процессов.
5. Не бояться неустойчивостей счета при использовании схем первого порядка аппроксимации.

Недостатками МПХ являются:

1. Жесткая связь между шагом по времени и шагом по координатам, что накладывает ограничения на пространственную сетку. Например, для кусочно-однородных сред эта сетка также должна быть кусочно-однородной, со строго согласованным шагом.
2. Избыточность характеристических соотношений при рассмотрении волн в ограниченных телах. Так, для каждого направления можно построить столько же характеристических соотношений, сколько определяемых переменных. Поэтому для волн, распространяющихся в разных направлениях получается избыточное количество характеристических уравнений. В этом случае выбор необходимых уравнений определяется либо из контекста задачи, либо из дополнительных условий (обычно, устойчивости и точности вычислительных схем), либо из сравнения с известными решениями тех же задач.
3. Трудность согласовать область распространения волн с криволинейной сеткой при работе в криволинейной ортогональной системе координат.

Однако использование для интегрирования дивергентной формы характеристических уравнений (например, формула Гаусса-Остроградского) в значительной мере устраняет эту проблему.

#### 4. ЭТАПЫ РАЗРАБОТКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для применения МПХ к моделированию динамики и динамического разрушения тел сложной структуры, реологии и геометрии разработчику необходимо решить 5 взаимосвязанных задач:

1. Построить дифференциальную характеристическую форму уравнений динамики исследуемой среды.
2. Выбрать необходимые уравнения и дополнительные условия во всех характерных точках этой среды.
3. При моделировании динамики разрушения выбрать критерии разрушения (расслоения) и последовательность условий на трещинах при различных напряжениях на их берегах и положении самих берегов.
4. Разработать схему проекта с учетом пунктов 2 и 3.
5. Построить характеристические конечноразностные схемы во всех характерных точках среды и при всех возможных состояниях среды в этих точках, составить подпрограммы, организующие ввод данных, расчет напряженно-деформированного состояния во всех точках пространственной сетки в последовательные моменты времени и вывод полученных результатов в требуемой форме. Объединить весь этот алгоритмический материал (как набор подпрограмм) в единую программу и протестировать ее на задачах с известными или интуитивно известными решениями.

К настоящему времени первая задача решена в рамках малых деформаций для всех видов симметрично-упругих упруговязкопластических деформируемых твердых тел [7].

В случае, если в рассматриваемой точке распространяются волны нескольких направлений или должны выполняться какие-нибудь дополнительные условия, система (11) оказывается переопределенной и выбор тех или иных из входящих в нее уравнений может быть сделан только после дополнительного анализа процессов, происходящих в этой точке. Таким образом разработчик метода сталкивается со второй из указанных задач.

Для её решения необходимо привлечь

условия достижения устойчивости и максимальной точности характеристических вычислительных схем в типичных точках рассматриваемого тела. Этим вопросам посвящено несколько публикаций [8-10]. Так в [8] было показано, что необходимым условием устойчивости разностных характеристических схем во внутренней точке среды является использование всех независимых уравнений для продольных волн, распространяющихся в этой точке. В [9] была предложена характеристическая вычислительная схема в граничной точке, показано, что для построения этой схемы следует использовать те уравнения (11), для которых  $x_a$  совпадает с внутренней нормалью к границе; при этом характеристические уравнения следует дополнить граничными условиями

$$\zeta_\delta \Sigma_{\alpha\delta} + \omega_\delta V_\delta = \psi_\delta, \quad (\delta = 1, 2, 3), \quad (12)$$

в которых  $\zeta_\delta$  и  $\omega_\delta$  могут быть константами, функциями координат и времени или операторами времени, а  $\psi_\delta$  – константой или функцией.

В [10], в соответствии с указаниями [8] и [9], для плоских и осесимметричных тел были построены характеристические вычислительные схемы во внутренних и граничных точках. Там же было показано, что в точках на оси симметрии использование правила Лопитала к неопределенностям типа  $V_R/R$ ,  $\Sigma_{RZ}/R$  и  $(\Sigma_{RR} - \Sigma_{\theta\theta})/R$  приводит к тому, что некоторые характеристические уравнения совпадают друг с другом, в силу чего три из них могут быть исключены и заменены условиями  $V_R = 0$ ,  $\Sigma_{RZ} = 0$  и  $\Sigma_{RR} = \Sigma_{\theta\theta}$ .

В [11] для плоских и осесимметричных

кусочно-однородных тел была предложена вычислительная схема в точке контакта слоев. Согласно этой схеме вычислительный шаблон в точке контакта слоев представлялся в виде двух схем граничных точек, расположенных в одном месте в смежных слоях и соединенных условиями контакта.

$$\Sigma_{\alpha i}^+ = \Sigma_{\alpha i}^-, V_i^+ = V_i^-, i = \alpha, \beta. \quad (13)$$

Впоследствии эта схема была усовершенствована и приспособлена к задачам динамического разрушения [12]: в нее были введены критерии разрушения (на отрыв и на сдвиг) и условия автоматического выбора последовательности условий на контакте; также она была обобщена на случай трёхмерных задач. При расслоении в зависимости от типа разрушения эта последовательность условий задается с помощью одной из Таблиц - 1 или 2.

В таблицах обозначено:  $\Sigma_{\alpha\alpha}^+$ ,  $\Sigma_{\alpha\alpha}^-$ ,  $\Sigma_{\alpha\beta}^+$ ,  $\Sigma_{\alpha\beta}^-$  – нормальные и касательные напряжения с обеих сторон трещины отрыва, распространяющейся вдоль оси  $x_\beta$ ;  $u_\alpha^+$ ,  $u_\alpha^-$ ,  $u_\beta^+$ ,  $u_\beta^-$  – перемещения вдоль осей  $x_\alpha$  и  $x_\beta$  с обеих сторон трещины,  $\Sigma^*$ ,  $k$  и  $\gamma$  – опытные константы,  $\tau^* = -k\Sigma^*$ ,  $\Delta u_\alpha = u_\alpha^+ - u_\alpha^-$ ,  $V_\beta^+$  и  $V_\beta^-$  – скорости частиц вдоль трещины.

Аналогично вышеуказанным были построены вычислительные схемы и в некоторых других типичных точках тел, однако следует заметить, что в общем случае эта проблема не решена и требует дополнительного анализа процессов в рассматриваемых точках с привлечением тестовых задач, желательно имеющих аналитическое решение, или с использованием других численных методов.

Таблица 1.

Трещина отрыва

Сжатие: $\Delta u_\alpha < 0$		Растяжение: $\Delta u_\alpha \geq 0$
$\Sigma_{\alpha\alpha} < -\Sigma^*$	$\Sigma_{\alpha\alpha} < -\Sigma^*$	
$\Sigma_{\alpha\alpha}^+ = \Sigma_{\alpha\alpha}^-$	$\Sigma_{\alpha\alpha}^+ = \Sigma_{\alpha\alpha}^-$	$\Sigma_{\alpha\alpha}^+ = 0$
$\Sigma_{\alpha\beta}^+ = \tau^*$	$\Sigma_{\alpha\beta}^+ = k\Sigma_{\alpha\alpha}^+$	$\Sigma_{\alpha\alpha}^- = 0$
$\Sigma_{\alpha\beta}^- = \tau^*$	$\Sigma_{\alpha\beta}^- = k\Sigma_{\alpha\alpha}^-$	$\Sigma_{\alpha\beta}^+ = 0$
$V_\alpha^+ = V_\alpha^-$	$V_\alpha^+ = V_\alpha^-$	$\Sigma_{\alpha\beta}^- = 0$

Таблица 2

Трещина сдвига

Сжатие: $\Delta u_\alpha < 0$		Растяжение: $\Delta u_\alpha \geq 0$
$\Sigma_{\alpha\alpha}^+ = \Sigma_{\alpha\alpha}^-$		$\Sigma_{\alpha\alpha}^+ = 0$
$\Sigma_{\alpha\beta}^+ = -\gamma  \Sigma_{\alpha\alpha}^+  \text{sgn}(V_\beta^+ - V_\beta^-)$		$\Sigma_{\alpha\alpha}^- = 0$
$\Sigma_{\alpha\beta}^- = \gamma  \Sigma_{\alpha\alpha}^-  \text{sgn}(V_\beta^+ - V_\beta^-)$		$\Sigma_{\alpha\beta}^+ = 0$
$V_\alpha^+ = V_\alpha^-$		$\Sigma_{\alpha\beta}^- = 0$

Задача выбора и стыковки пространственных сеток связана с тем, что в МПХ шаг по времени  $h_t$  и шаг по координате  $x_a - h_a$  связаны соотношением  $h_a = c_a \cdot h_t$ , где  $c_a$  – скорость продольных волн в направлении  $x_a$ .

Поэтому выбор единого шага по времени для неоднородного или анизотропного тела требует различных шагов по координатам как для различных направлений (из-за анизотропии), так, возможно, и при переходе от точки к точке (из-за неоднородности)

При стыковке пространственных сеток на границах раздела сред с различными физико-механическими свойствами возникает несовпадение узлов сеток с разных сторон границы, вследствие чего приходится применять процедуру интерполяции между узлами, что приводит к уменьшению точности расчетов в точках на границе раздела сред.

Жесткая связь между шагами сетки по времени и по координатам оказывается неудобной также для тел с криволинейными границами, поскольку для таких тел координатная сетка неравномерная. Для таких тел также приходится применять интерполяцию узлов расчетной сетки между узлами координатной сетки, причем во всем теле, или пользоваться интегральными теоремами.

Рассмотрим пример использования МПХ при моделировании динамического разрушения сложного объекта.

**4.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ ДОМА ПРИ ДЕЙСТВИИ СЕЙСМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ**

План моделируемого двухэтажного сооружения показан на рис. 1a,b, цифрами обозначены оконные дверные и лючный проемы. Оконные проемы на обоих рисунках одинаковы, также одинаковы и дверные проемы. Дверные проемы обозначены: цифрами 1-3 и 9, 10; оконные проемы обозначены цифрами 4-7 и 11-15. Лючный проем обозначен пунктиром и имеет цифру 8. Левый рисунок соответствует плану первого этажа сооружения, а правый – второго. Все проемы и внутренние границы сооружений предполагаются свободными от напряжений. Здание рассматривается, как двухслойный упруговязкопластический материал (фундамент и здание) с разными характеристиками слоев. Предполагается, что сейсмическая нагрузка действует на

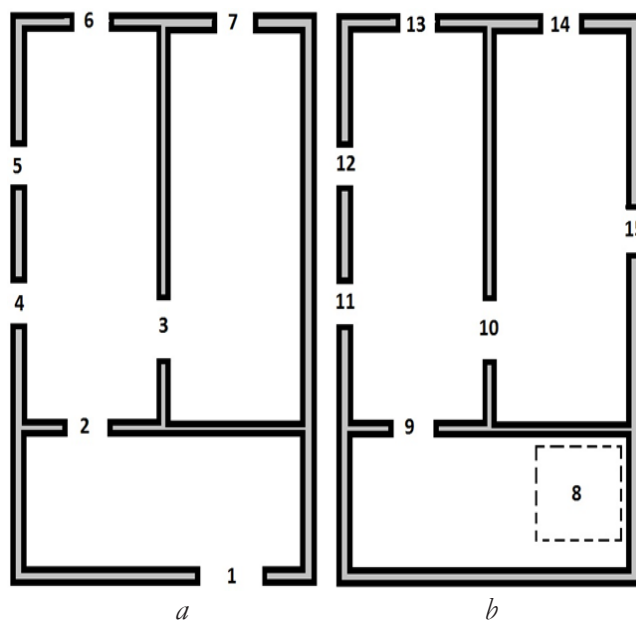


Рис 1. Первый (a) и второй (b) этажи строения.

нижнюю поверхность фундамента. Форма сейсмического импульса – треугольник. Время нарастания в 3 раза меньше времени спадания. Длительность импульса велика по сравнению со временем пробега по любой поверхности дома и равна времени моделирования. При моделировании динамики амплитуда импульса много меньше пределов текучести на сдвиг материалов дома.

*Модель и метод.* Математическая модель динамики материала здания и фундамента состоит из уравнений движения, условий аддитивности упругих и вязкопластических деформаций, уравнений Коши, закона пластичности и закона Гука для упругих деформаций.

$$\begin{aligned} \partial_j \sigma_{ij}^k &= \rho^k \partial_t V_i^k, \quad \varepsilon_{ij}^k = (\varepsilon_{ij}^k)^e + (\varepsilon_{ij}^k)^{vp}, \\ \sigma_{ij}^k &= 2\mu^k (\varepsilon_{ij}^k)^e + \lambda^k \delta_{ij} (\varepsilon_{mm}^k)^e, \\ \partial_t \varepsilon_{ij}^k &= (\partial_j V_i^k + \partial_i V_j^k) / 2, \\ (\varepsilon_{ij}^k)^{vp} &= \Phi^k(\sigma_{ij}^k), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $\sigma_{ij}^k, \varepsilon_{ij}^k, V_i^k, \rho^k$  – напряжения, деформации в  $k$ -том слое, скорости частиц и плотность материала в  $k$ -том слое,  $\mu^k$  и  $\lambda^k$  – параметры Ламе,  $S^\alpha = \sqrt{s_{ij}^\alpha s_{ij}^\alpha} / 2$  – интенсивность напряжений в теле,  $\Phi^k(\sigma_{ij}^k) = \Phi^k(S^k - k_S^k)$  – функция пластичности,  $s_{ij}^k = \sigma_{ij}^k - \delta_{ij} p^k$  – девиатор напряжений,  $p^k = \sigma_{ii}^k / 3$  – гидростатическое давление,  $k_S^k$  – статический предел текучести материала тела при сдвиге.

Видно, что модель (14) в декартовой системе

координат сводится к модели изотропного тела при следующих упрощениях в матрице  $\tilde{C}$ :

$$\begin{aligned} c_{11}^k = c_{22}^k = c_{33}^k = 2\mu^k + \lambda^k, c_{44}^k = c_{55}^k = c_{66}^k = \mu^k, \\ c_{12}^k = c_{13}^k = c_{23}^k = \lambda^k, \nu^k - \text{коэффициент Пуассона,} \\ \nu_1^k = \nu^k / (1 - \nu^k), \nu_2^k = 1 - \nu_1^k, \tilde{F}_j^k = 0, \\ \tilde{\Phi}_{\alpha j}^k = \gamma^k \sqrt{S^k - k_S^k} \cdot s_{\alpha j}^k / S \\ \text{и } \tilde{\Phi}_{\alpha j}^k = 0 \text{ при } S^k < k_S^k. \end{aligned}$$

Следовательно характеристическая форма (14) сводится к (11) при указанных выше упрощениях.

Проведем обезразмеривание характеристической формы системы (14) с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i = x_i / x_0, \tau^k = c_0^k t / x_0, \tilde{\sigma}_{ij}^k = \sigma_{ij}^k / k_S^k, \\ \tilde{S}^k = S^k / k_S^k, \tilde{V}_i^k = V_i^k / V_S^k, k_S^k = \rho^k c_0^k V_S^k, \\ \gamma^k = x_0 / (V_S^k \tau_0^k), \end{aligned}$$

в которых  $x_0$  – нормировочная константа, за которую принят размер сооружения по оси  $x_i$  ( $x_0 = l$ , где  $l$  – максимальный линейный размер строения),  $V_S^k$  – скорость частиц материала, при которой начинается пластическое течение  $\alpha$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2$ ; по повторяющимся греческим индексам суммирование не производится,  $c_0^k = \sqrt{(2\mu^k + \lambda^k) / \rho^k}$  – скорость продольной волны в слое,  $\tau_0^k$  – время задержки текучести.

После проведения указанных упрощений и обезразмеривания эта система примет вид: для продольной волны, движущейся со скоростью  $c_0^k$  в обе стороны вдоль оси  $x_\alpha$

$$\begin{aligned} (\partial / \partial \tau^k \pm \partial / \partial x_\alpha)(\sigma_{\alpha\alpha}^k \mp V_\alpha^k) = \\ = \partial / \partial x_\beta (v_1^k V_\beta^k \pm \sigma_{\alpha\beta}^k) + \partial / \partial x_\gamma (v_1^k V_\gamma^k \pm \sigma_{\alpha\beta}^k) - \\ - \Phi_{\alpha\alpha}^k - v_1^k (\Phi_{\beta\beta}^k + \Phi_{\gamma\gamma}^k), \end{aligned} \quad (15)$$

для поперечных волн, распространяющихся со скоростью  $c_\perp^k = \sqrt{\mu^k / \rho^k}$  вдоль той же оси

$$\begin{aligned} (\partial / \partial \tau^k \pm \xi^k \partial / \partial x_\alpha)(\sigma_{\alpha\beta}^k \mp \xi^k V_\beta^k) = \\ = \partial / \partial x_\beta (v_2^k V_\alpha^k / 2 \pm \xi^k \sigma_{\beta\beta}^k) \pm \\ \pm \partial / \partial x_\gamma (\xi^k \sigma_{\beta\gamma}^k) - \Phi_{\alpha\beta}^k, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (\partial / \partial \tau^k \pm \xi^k \partial / \partial x_\alpha)(\sigma_{\alpha\gamma}^k \mp \xi^k V_\gamma^k) = \\ = \partial / \partial x_\gamma (v_2^k V_\alpha^k / 2 \pm \xi^k \sigma_{\gamma\gamma}^k) \pm \\ \pm \partial / \partial x_\beta (\xi^k \sigma_{\beta\gamma}^k) - \Phi_{\alpha\gamma}^k, \end{aligned} \quad (17)$$

для неподвижных разрывов с нормалью  $x_\alpha$

$$\begin{aligned} \partial / \partial \tau^k (\sigma_{\beta\beta}^k - v_1^k \sigma_{\alpha\alpha}^k) = \\ = v_2^k (1 - v^k)^{-1} (\partial V_\beta^k / \partial x_\beta + v^k \partial V_\gamma^k / \partial x_\gamma - \\ - \Phi_{\beta\beta}^k - v^k \Phi_{\gamma\gamma}^k), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \partial / \partial \tau^k (\sigma_{\gamma\gamma}^k - v_1^k \sigma_{\alpha\alpha}^k) = \\ = v_2^k (1 - v^k)^{-1} (\partial V_\gamma^k / \partial x_\gamma + v^k \partial V_\beta^k / \partial x_\beta - \\ - \Phi_{\gamma\gamma}^k - v^k \Phi_{\beta\beta}^k), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \partial / \partial \tau^k \sigma_{\beta\gamma}^k = \\ = v_2^k [(\partial V_\beta^k / \partial x_\gamma + v^k \partial V_\gamma^k / \partial x_\beta) / 2 - \Phi_{\beta\gamma}^k], \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\xi^k = c_\perp^k / c_0^k$  – отношение скорости поперечной волны  $c_\perp^k = \sqrt{\mu^k / \rho^k}$  к скорости продольной волны  $c_0^k$ . Значок «волна» над функциями снят, поскольку в дальнейшем, если не оговорено, будут использоваться эти нормировки.

Заметим, однако, что формулы (16)-(20) не могут быть использованы непосредственно, если (как в данном случае) конструкции имеют кусочно-однородное строение. Это связано с тем, что нормировка времени в каждом слое различна и зависит от скорости звука  $c_0^k$  в нем. Для того, чтобы исключить эту зависимость проведем следующие преобразования:

1. Выберем  $c_0 = \max_k c_0^k$  и разделим все  $c_0^k$  на  $c_0$ , обозначим  $\bar{c}_0^k \equiv c_0^k / c_0$ .
2. Обозначим  $\tau = c_0 t / x$ , тогда  $\tau^k = \bar{c}_0^k \tau$ .
3. Умножим все уравнения (16)-(20) на  $\bar{c}_0^k$  и обозначим  $x_\eta^k = x_\eta / \bar{c}_0^k$ ,  $\eta = \alpha, \beta, \gamma$ . Обозначим  $\bar{\gamma}^\alpha \equiv \bar{c}_0^\alpha \gamma^\alpha$ .

Рассмотрим получившиеся уравнения, используя введенные соотношения. Так, например, уравнение (16) в новых обозначениях примет вид

$$\begin{aligned} (\partial / \partial \tau \pm \partial / \partial x_\alpha)(\sigma_{\alpha\alpha}^k \mp V_\alpha^k) = \\ = \partial / \partial x_\beta (v_1^k V_\beta^k \pm \sigma_{\alpha\beta}^k) + \partial / \partial x_\gamma (v_1^k V_\gamma^k \pm \sigma_{\alpha\beta}^k) - \\ - \bar{F}_{\alpha\alpha}^k - v_1^k (\bar{F}_{\beta\beta}^k + \bar{F}_{\gamma\gamma}^k), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\bar{\Phi}_{\eta\zeta}^k = \bar{\gamma}^k \frac{\sqrt{S^k - 1}}{S^k} s_{\eta\zeta}^k$ ,  $\eta, \zeta = \alpha, \beta, \gamma$ .

Вид остальных уравнений изменится аналогичным образом.

Зададим изменение времени  $\Delta\tau$ , тогда положение фронта волны в  $k$ -том слое изменится на величину  $\boxed{\Delta x^\alpha = \pm \Delta\tau \cdot \bar{c}_0^\alpha}$ . Это соотношение определяет связь между временной



и пространственными сетками, используемыми при численном моделировании динамики и динамического разрушения кусочно-однородных изотропных тел методом пространственных характеристик. Заметим, что все величины, стоящие под знаком дифференциала, при этом не меняются, а алгебраические члены просто умножаются на константу ( $\bar{c}_0^\alpha$ ); в силу изотропии тела эта константа оказывается одинаковой для всех направлений распространения волн.

Приведенные рассуждения показывают, что алгоритмы, разработанные для однородных изотропных тел, могут быть использованы и во внутренних точках кусочно-однородных тел, меняется только пространственная сетка и некоторые константы, задаваемые как входные данные.

В точках границы раздела слоев расчетные схемы могут быть получены модернизацией схем, описывающих возникновение и распространение трещин вдоль этой границы раздела. При этом на границе раздела  $k$ -того и  $k+1$ -ого слоев с единичным вектором нормали  $n$  и касательной  $\tau$  в зависимости от напряженно-деформированного состояния в ее окрестности и наличия или отсутствия трещин на ней выполняются либо условия непрерывности:

$$\bar{V}_i^k = a\bar{V}_i^{k+1}, \bar{\Sigma}_{in}^k = b\bar{\Sigma}_{in}^{k+1},$$

где

$$a = V_S^{k+1} / V_S^k, b = k_S^{k+1} / k_S^k, \tag{22}$$

либо условия свободной поверхности

$$\bar{\sigma}_{in}^k = \bar{\sigma}_{in}^{k+1} = 0, \tag{23}$$

либо условия кулоновского трения:

$$\bar{V}_n^k = a\bar{V}_n^{k+1}, \bar{\Sigma}_{nn}^k = b\bar{\Sigma}_{nn}^{k+1}, \bar{\Sigma}_{n\tau}^k = -\bar{\Sigma}_{n\tau}^{k+1}, \tag{24}$$

$$\bar{\Sigma}_{n\tau}^{k+1} = \omega^k \cdot \left| \bar{\Sigma}_{nn}^{k+1} \right| \text{sgn}(V_\tau^{k+1} - V_\tau^k),$$

где  $\tau \neq n$  и  $\omega^k < 1$  – коэффициент сухого трения.

Нетрудно заметить, что соотношения (22)-(24) являются обобщением соотношений, данных в таблицах 1 и 2.

Другая важная проблема, возникающая при моделировании динамики на границе раздела слоев, заключается в несовпадении узлов сеток с разных сторон границы раздела. Эта проблема решается с помощью схем линейной интерполяции опорных точек: вначале опорные точки  $k+1$  слоя интерполируются таким образом, чтобы получить расчетную схему для контактной

поверхности со стороны  $k$ -того слоя, и с их помощью рассчитываются  $\Sigma_{ij}$  и  $V_i$  на  $k$ -том слое (эти значения используются в дальнейшем для расчетов на  $k$ -том слое), затем интерполируются опорные точки на  $k$ -том слое и с их помощью рассчитываются  $\Sigma_{ij}$  и  $V_i$  на  $k+1$ -ом слое и они используются для расчетов на  $k+1$ -ом слое. В самих расчетных схемах проводится анализ напряжений и перемещений на внутренних границах контакта и на основе этого анализа принимается решение о применении того или иного из соотношений (22)-(24).

Критерии образования трещин во внутренних точках конструкции выбираются с учетом накопления повреждений в виде  $J_n = A$

$$\text{или } J_\tau = B, \text{ где } J_n = \int_{\tau_0}^{\tau} \langle \sigma_n(\tau) / \sqrt{3} - 1 \rangle d\tau,$$

$$J_{\tau i} = \int_{\tau_1}^{\tau} \langle \sigma_{\tau i}(\tau) - 1 \rangle d\tau, \quad i = 1, 2, \text{ константы } A \text{ и}$$

$B$  определяются экспериментально из опытов, а направление нормали  $n$  или касательных  $\tau$  определяется по результатам моделирования динамики.

Здесь  $\langle f \rangle = f$  при  $f > 0$  и  $\langle f \rangle = 0$  при  $f \leq 0$ ;  $A = B = 1$ ;  $\tau_0$  и  $\tau_1$  – моменты времени, в которые соответствующие напряжения впервые выходят в пластическую область.

Для выполнения критериев разрушения во всех внутренних точках сооружений и фундаментов предполагается непрерывность скоростей частиц и напряжений. Далее предполагается, что трещина развивается в соответствии с условиями (22)-(24), в которых  $a = b = 1$ .

*Граничные и начальные условия.* Нагрузка состоит из двух частей: собственно сейсмической волны  $P(t)$ , показанной на рис. 5 пунктирной линией, и упругой реакции грунта на основание фундамента, выражающейся формулой Винклера, в которой, в силу специфики принятой формы уравнений модели, коэффициент пропорциональности между нормальным напряжением на границе фундамент-грунт и нормальным перемещением грунта –  $k$  оказывается нормированным на  $\rho^1(c_0^1)^2$ , где индекс единица соответствует фундаменту. Вес сооружения и фундамента не учитывается, поскольку считается, что он уравновешен статической реакцией грунта и в



Рис. 2. Блок-схема моделирования динамического разрушения строения.

процессе моделирования не меняется.

Общая формула нагружения в каждой точке  $\{x_2, x_3\}$  основания фундамента ( $x_1 = 0$ ) имеет вид  $P(t, x_2, x_3) = k u^1(t, x_2, x_3) - P(t) \leq 0$  и  $P(t, x_2, x_3) = 0$  (25) при  $k \cdot u(t, x_2, x_3) - P(t) > 0$ ,

где  $u^1(t, 0, x_2, x_3) = \int_0^t V(t, 0, x_2, x_3) dt$  - перемещение

нижней точки фундамента вниз по оси  $x_1$ . Первая формула в (25) относится к такому нагружению, при котором сохраняется контакт между грунтом и подошвой основания сооружения, вторая – когда такой контакт нарушен и между подошвой и грунтом образовалась полость. В начальный момент здание находится в состоянии покоя.

Общая схема проекта представлена на рис. 2. С ее помощью решаются две задачи моделирования:

1. Исследование динамики здания под действием сейсмической нагрузки.
2. Исследование его динамического разрушения при нагрузке того же типа.

Решение указанных задач подразделяется на шесть последовательных этапов.

На первом этапе проводится моделирование динамики сооружений и фундаментов, разрушение их не предусматривается. Нагрузкой являются нормальные сжимающие напряжения, действующие на фундамент и моделирующие сейсмическую нагрузку [13]. Форма нагружающего импульса имеет вид напряжений  $P_j = P_0 \cdot f(t)$ , где  $f(t)$  – треугольный импульс, амплитуда которого равна 1, длительность соответствует 30 времен пробега волны по максимальному размеру здания (что равно времени моделирования); амплитуда  $P_0$  имеет такую величину, что разрушения, даже локального, не происходит. Массивы данных, полученные в результате моделирования на этом

этапе, используются для графической обработки с целью определения максимальных напряжений и областей их локализации.

На втором этапе проводится указанная обработка. При этом используются примитивы OpenGL и авторские подпрограммы построения изолиний, разработанные на базе пакета ГРАФОР.

На третьем этапе выбираются критерии начала разрушения и условия на трещинах. В качестве критериев начала разрушения используются условия накопления неупругих нормальных или касательных напряжений до заранее заданной величины. Дальнейшее поведение образовавшейся при этом трещины определяется с помощью одной из таблиц, приведенных выше.

На четвертом этапе проводится моделирование динамического разрушения конструкции при различных амплитудах нагружающих напряжений  $P_0$ . В качестве критерия полного разрушения конструкции принимается полное разрушение какого-либо ее сечения. Анализ разрушения производится автоматически, а выполнение указанного критерия используется для окончания счета. Предполагается также, что разрушение происходит за время, не превышающее 30 времен пробега продольной волны по максимальному размеру сооружения.

На пятом этапе массивы, полученные в момент полного разрушения конструкции, подвергаются анализу с целью определения областей катастрофического разрушения и характера разрушений в них.

И, наконец, на шестом, последнем, этапе решается задача определения минимальных нагрузок, приводящих к полному разрушению конструкций.

*Параметры моделирования.* В силу выбора нормировок, изменяемыми физико-механическими параметрами являются коэффициенты Пуассона  $\nu^1$  и  $\nu^2$ , соответственно, фундамента и строения, относительные продольные скорости  $\bar{c}_0^1$  и  $\bar{c}_0^2$ , относительный предел текучести на сдвиг  $b$ , относительный предел скоростей начала текучести  $\alpha$ , коэффициенты, определяющие начало текучести  $\gamma^1$  и  $\gamma^2$ , коэффициенты сухого трения –  $d^1$  и  $d^2$  и шаг по времени –  $h$ . Величина  $h$

определяется из нормировки на максимальный размер сооружения, который принимается за 1, и максимальной скорости, которая также принимается за 1. Остальные параметры геометрические и определяют (в ячейках) габариты и пространственную структуру строений и фундаментов; размер ячеек определяется пространственной сеткой в соответствующих слоях.

Строение имеет размеры  $(x \times y \times z)$   $80 \times 144 \times 80$  ячеек, толщина основания 4 ячейки, а толщина боковых и верхней стенок меняется и составляет 2, 3 или 4 ячейки, размеры окон  $10 \times 10$  ячеек, двери –  $20 \times 10$  ячеек. Размеры люка  $24 \times 32$  ячеек. Расположение окон, дверей и люка показаны на планах рис. 1а,б. Максимальный размер строения принимается равным единице.

На первом этапе моделирования, как указывалось выше, возможность разрушения не рассматривалась. При различном порядке следования слоев в зависимости от толщины фундамента или стен строения определялись напряжения в средней точке фундамента в течение всего времени моделирования.

На рис. 3-6 показана эволюция нормального напряжения  $\sigma_{11}$  в срединной точке основания строения,  $P = -0.01 k_z$ , что соответствует сжатию. Время  $\tau$  измеряется в пробегах продольных волн по наибольшему размеру строения (здесь по  $y$ ). Пунктиром на рис. 5 показана сейсмическая нагрузка. Коэффициент  $k$  в соответствии с результатами [14] выбран равным 0.0005.

Рисунки 3 и 4 соответствуют случаю, когда фундамент изготовлен из более жесткого

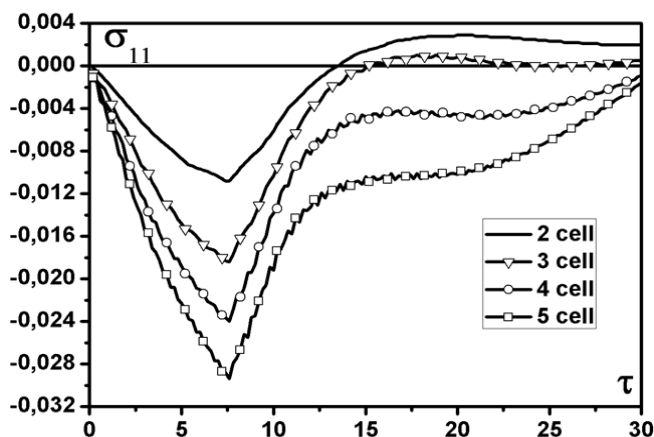


Рис. 3. Зависимость напряжения в основании здания (ед изм. толщины – ячейка) от времени пробега волн сейсмической нагрузки. Кривые – для разных толщин стен здания.

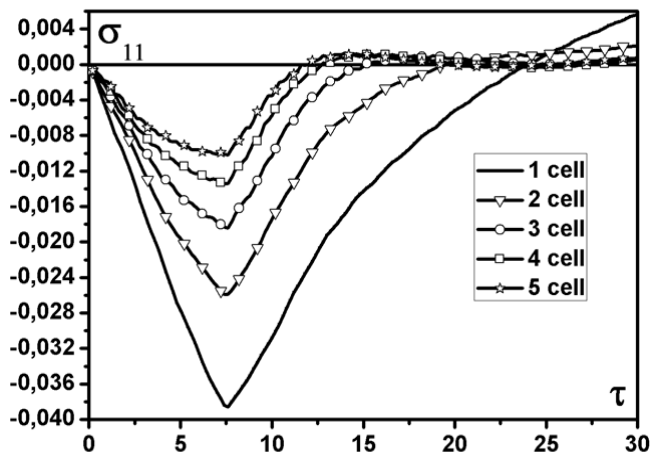


Рис. 4. Сейсмозависимость основания здания от толщины его фундамента (жесткий фундамент).

материала, при этом

$$c_0^1 = 1, c_0^2 = 0.5, \nu^1 = 0.1, \nu^2 = 0.2, a = 1, b = 0.5,$$

$$\omega^1 = 0.3, \omega^2 = 0.3, \bar{\gamma}^1 = 0.2, \bar{\gamma}^2 = 0.1.$$

Аргументом графиков является безразмерное время  $\tau$ , определяемой величиной – нормальное напряжение  $\sigma_{11}$ , действующее в том же направлении, что и нагрузка. Это напряжение пронормировано на тот слой, где приложена нагрузка.

Изменяемым параметром на рис. 3 является толщина здания, которая составляет, соответственно, 2, 3, 4 и 5 ячеек, фиксированным параметром является толщина фундамента, которая составляет 3 ячейки. На рис. 4 изменяемым параметром является толщина фундамента, которая изменяется от 1 до 5 ячеек, фиксированный параметр – толщина стен здания, которая составляет 3 ячейки.

На рис. 5 и рис. 6 показаны те же напряжения  $\sigma_{11}$  в той же точке того же строения и при той же

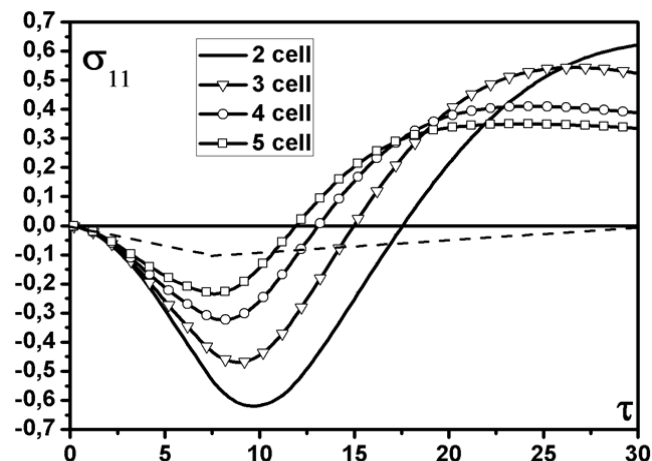


Рис. 5. Мягкий фундамент. Меняется толщина стен здания.

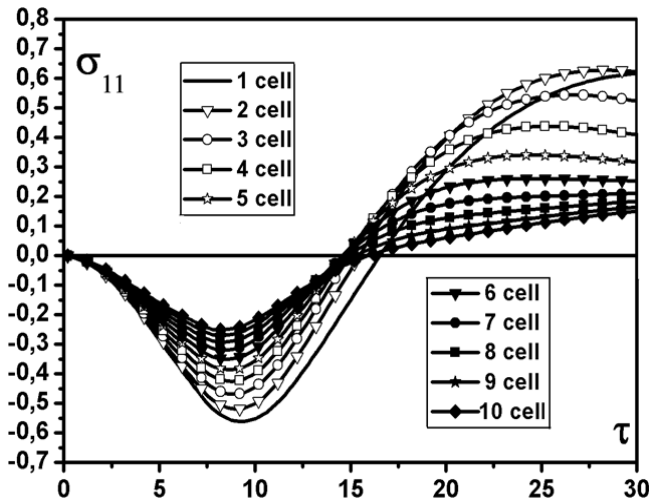


Рис. 6. Мягкий фундамент. Меняется толщина фундамента.

нагрузке, но при обратной последовательности материалов: здесь

$$c_0^1 = 0.5, c_0^2 = 1, \nu^1 = 0.2, \nu^2 = 0.1,$$

$$\omega^1 = 0.3, \omega^2 = 0.3, \bar{\gamma}^1 = 0.1, \bar{\gamma}^2 = 0.2, a = 1, b = 2.$$

Рис. 5, так же как и рис. 3, соответствует случаю, когда изменяемым параметром является толщина стенок здания (от 2 до 5 ячеек), а неизменяемым – толщина фундамента (3 ячейки). На рис. 6 изменяемым параметром является толщина фундамента: количество ячеек фундамента по его толщине меняется от 1 до 10 с учетом того, что размер ячейки сетки в фундаменте в этом случае в 2 раза меньше, чем в случае, показанном на рис. 3; толщина здания остается неизменной и составляет 3 ячейки.

Анализ графиков, приведенных на рис. 3-6 показывает, что в том случае, если материал фундамента прочнее материала строения, напряжения  $\sigma_{11}$ , создаваемые нагрузкой в основании строения, в два раза меньше.

Во второй постановке определяются амплитуды минимальных сейсмических нагрузок, приводящих к разрушению сооружений. При моделировании сооружение считается разрушенным, если полностью разрушенным оказывается одно из его поперечных сечений. Это требование является достаточным для разрушения, но не является необходимым. Поэтому полученные значения нагрузок оказываются завышенными. Поскольку разрушение может иметь сложный характер, рассматриваются 9 критериев разрушения: 3 по нормальным напряжениям и 6 по касательным. Анализ механизмов разрушения показывает, что

возможно как пересечение трещин (с частичным локальным залечиванием материала в области пересечения), так и слияние трещин одного направления с образованием магистральной трещины.

При моделировании изменялась как толщина фундамента, как и толщина всех стен сооружения. В соответствии с анализом рис. 3-6 предполагалось, что жесткость фундамента выше жесткости строения ( $b = 0.5$ ).

В нижеследующей Таблице 3 приведены величины минимальных амплитуд сейсмических нагрузок  $P_p$ , приводящих к полному разрушению строений. Нагрузка  $P_f$  показана пунктиром на рис. 5. Цифрами 1-6 по вертикали указана выраженная в количестве ячеек толщина фундамента; цифрами 2-6 по горизонтали указана толщина стен и перегородок сооружений (они приняты одинаковыми), выраженная также в ячейках. Знак минус соответствует сжатию.

Анализ данных, приведенных в таблице 3, показывает, что при минимальной толщине стен – 2 ячейки, независимо от толщины фундамента, разрушающие напряжения крайне малы. Далее, с ростом толщины стен, эти напряжения быстро нарастают; зависимость от толщины фундамента при одной и той же толщине стен оказывается более слабой. Многообразие возможных механизмов разрушения и движение трещин в различных направлениях может приводить как к их частичному залечиванию – когда трещины различных направлений, пересекаясь, останавливают друг друга, или ускоряют разрушение, когда трещины одного направления, двигающиеся по одной прямой, сливаются. Эти эффекты проявляются тогда, когда толщина стен или фундамента оказывается достаточно большой, - при этом минимальные разрушающие напряжения  $P_f$

Таблица 3

Минимальные нагрузки, приводящие к полному разрушению структуры

Фундамент \ Стены	2	3	4	5	6
1	-0.01	-0.35	-0.41	-0.45	-0.41
2	-0.02	-0.38	-0.52	-0.46	-0.46
3	-0.02	-0.37	-0.54	-0.55	-0.45
4	-0.02	-0.35	-0.56	-0.56	-0.45
5	-0.02	-0.34	-0.54	-0.54	-0.41
6	-0.02	-0.33	-0.52	-0.54	-0.42



могут колебаться в значительных пределах. Максимум разрушающей нагрузки равен  $-0.56$  и достигается при толщине стен в 4 или 5 ячеек и толщине фундамента 4 ячейки, при больших толщинах стен из-за слияния трещин одного направления в фундаменте минимальные разрушающие нагрузки несколько падают.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение еще раз подчеркнем те свойства характеристической формы уравнений динамики деформируемых твердых тел, которые делают ее привлекательной для численного исследования:

1. Уменьшенное на единицу число независимых переменных; при этом резко снижается количество вычислений и объем требуемой памяти. Кроме того, максимально сближены области зависимости дифференциальных уравнений и их конечно-разностных аналогов, что позволяет увеличить точность расчетов при моделировании динамики. Точно передаются скачки возмущений. При первом порядке аппроксимации вычислительные схемы дивергентны, имеют положительную аппроксимационную вязкость, устойчивы и консервативны.
2. Блочный вид дифференциальных уравнений; их дифференциальная часть записывается в сопутствующей декартовой системе координат, правая часть состоит из отдельных блоков: блока массовых сил, блока, связанного с реологией и блока геометрических членов (в криволинейной системе координат). Такое строение алгоритмизуемых уравнений позволяет создавать программы, состоящие из отдельных функциональных модулей, и легко перестраиваемые при изменении реологии, массовых сил и кривизны координатной системы.
3. Распад характеристических уравнений на независимые пары и отдельные уравнения. Для изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных сред система характеристических уравнений распадается на ряд независимых скалярных пар уравнений для соответствующих пар неизвестных напряжений и скоростей частиц. Такими парами уравнений являются уравнения на движущихся разрывах, а переменными (для

волн, распространяющихся в направлении  $x_j$ )  $-\Sigma_{ij}$  и  $V_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . При этом еще более упрощается вид уравнений и сокращается объем вычислений, а для граничных точек и точек, в которых возможно разрушение, появляется возможность вводить внутрь вычислительных схем дополнительные условия – граничные условия или условия на трещине, в которых определяются те же переменные. Оставшиеся уравнения являются отдельными уравнениями для определения напряжений  $\Sigma_{ij}$ ,  $\Sigma_{kk}$  и  $\Sigma_{jk}$ , причем в каждое уравнение входит только одна из этих переменных.

4. При исследовании процессов разрушения или расслоения характеристическая форма представления исходных уравнений позволяет использовать двойную пространственную сетку и проводить моделирование при различных, меняющихся в процессе счета, условиях на границах между ячейками. Таким образом может быть смоделировано не только образование и движение трещины, но и множественное разрушение тел.

Приведенный пример моделирования разрушения двухэтажного дома демонстрирует возможности применения МПХ для решения на ПЭВМ сложных, практически важных задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. М., Мир, 1964, с. 550-758.
2. Магомедов КМ, Холодов АС. *Сеточно-характеристические численные методы*. М., Наука, 1988, 288 с.
3. Магомедов КМ, Холодов АС. *Сеточно-характеристические численные методы: учебное пособие*. М., Юрайт, 2018, 287 с.
4. Петров ИБ, Фаворская АВ, Хохлов НИ, Миряха ВА, Санников АВ, Беклемышева КА, Голубев ВИ. Сеточно-характеристический метод численного моделирования волновых процессов в трёхмерных задачах динамического нагружения сложных конструкций. *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии (РЭНСИТ)*, 2015, 7(1):34-47; DOI: 10.17725/rensit.2015.07.034.
5. Иванов АМ, Хохлов НИ, Петров ИБ. Применение

- технологий параллельного программирования для моделирования сейсмических волн сеточно-характеристическим методом. *РЭНСИТ*, 2016, 8(2):185-195; DOI: 10.17725/rensit.2016.08.185.
6. Егиян ВС, Фаворская АВ, Мкртчян АА, Петров ИБ, Хохлов НИ, Голубев ВИ. Численное моделирование процесса обнаружения карстовых полостей в железнодорожных насыпях сеточно-характеристическим методом. *РЭНСИТ*, 2017, 9(2):215-220; DOI: 10.17725/rensit.2017.09.215.
  7. Булычев ГГ. Построение матричной характеристической формы уравнений динамики анизотропных упруговязкопластических сред. *Известия РАН. Сер. Механика твердого тела*, 1995, 1:91-95.
  8. Courant R, Friedrichs KO, Lewy H. Uber die partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physic. *Math. Ann.*, 1928, 100:32.
  9. Butler DS. The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables. *Proc. Roy. Soc. A*, 1960, 255(1281):319-343.
  10. Кукуджанов ВН. Численное решение неоднородных задач распространения волн напряжений в твердых телах. *Сообщения по прикладной математике*, 6:67. М., ВЦ АН СССР, 1976.
  11. Булычев ГГ. Численное исследование динамики и динамической прочности кусочно-однородных упругопластических тел. *Строительная механика и расчет сооружений*, 1987, 5:56-59.
  12. Булычев ГГ, Кукуджанов ВН. Динамическое разрушение предварительно напряженного волокнистого композита, вызванное обрывом волокна. *Известия РАН, сер. МТТ*, 1993, 3:207-214.
  13. Котляревский ВА. Расчёт надёжности и сейсмостойкости сооружений. *Строительная механика и расчёт сооружений*, 2014, 2:40-46.
  14. Тяпин АГ. Расчёт динамического отрыва фундаментной плиты основания при сейсмическом воздействии. Часть 2: простейшее сочетание отрыва с запаздывающими жесткостями основания. *Строительная механика и расчёт сооружений*, 2013, 3:39-43.
- Булычев Георгий Гаврилович**  
*д.ф.-м. н., профессор*  
 МИРЭА-Российский технологический университет  
 78, просп. Вернадского, Москва 119454, Россия  
 geo-bulychev@mail.ru.

## METHOD OF SPATIAL CHARACTERISTICS IN PROBLEMS OF A MECHANICS OF A DEFORMABLE SOLID BODY

**Georgy G. Bulychev**

MIREA-Russian Technological University, <https://www.mirea.ru/>

Moscow 119454, Russian Federation

[geo-bulychev@mail.ru](mailto:geo-bulychev@mail.ru)

*Abstract.* In this article the method of spatial characteristics is considered and analyzed and its possibilities for studying of wave processes in deformable solid bodies of various structure and a rheology are investigated. Merits and demerits of a method are considered, and also the circle of tasks which it is necessary to solve for building of the characteristic form of mathematical model of dynamics and dynamic destruction of researched bodies and for its usage in numerical simulation. The initial and characteristic form of dynamical equations of the anisotropic symmetrically elastic bodies is shown. By means of the considered method numerically on PC the research problem of destruction of the two-storey house is solved at an earthquake load.

*Keywords:* dynamic processes, a method of spatial characteristics, numerical simulation, dynamics and destruction of buildings and constructions.

UDC 539.3

*Bibliography* – 14 references

*RENSIT*, 2018, 10(1):77-90

Received 19.04.2018

DOI: 10.17725/rensit.2018.10.077