ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Дышеков А.А.
Кабардино-Балкарский государственный университет им Х.М. Бербекова, http://www.kbsu.ru
Нальчик 360004, Российская Федерация
Поступила в редакцию 13.06.2018, принята 13.01.2019
Представлена действительным членом РАЕН В.А. Бушуевым

Предложен альтернативный подход к описанию взаимодействия электромагнитного поля с кристаллом, в котором основными характеристиками являются плотности энергии и импульса. Реакция среды на внешнее возмущение рассматривается как локальное изменение геометрии – поворот ортогонального базиса построенного на векторах индукции и импульса поля, определяемый структурными характеристиками среды. Получены уравнения, которые позволяют рассчитывать импульс и энергию поля при его взаимодействии с кристаллом.

Ключевые слова: **тензор энергии-импульса, электромагнитное поле, тензор Максвелла, производная Гато, канонический вид тензора поля.**

УДК 548.732

Содержание

1. **Введение (103)**
2. **Законы изменения импульса и энергии поля (104)**
3. **Канонический вид тензора Максвелла и условия для полей (105)**
4. **Релятивистское обоснование (106)**
5. **Фундаментальные уравнения в локальном базисе (107)**
6. **Вывод дифференциальных операций $\nabla' \cdot \mathbf{P}$, $\nabla' \cdot \mathbf{T}$, $\nabla' \cdot \varepsilon$ (108)**
   - **6.1. Расчет $\nabla' \cdot \mathbf{P}$ (108)**
   - **6.2. Расчет $\nabla' \cdot \varepsilon$ (109)**
   - **6.3. Расчет $\nabla' \cdot \mathbf{T}$ (109)**
7. **Расчет вектора поворота φ (109)**
8. **Вывод основной системы ураавнений в декартовом базисе (111)**
9. **Заключение (111)**

Литература (111)

1. ВВЕДЕНИЕ

Предлагается новый подход к описанию взаимодействия электромагнитного поля с веществом на основе плотностей энергии и импульса. Известные подходы для описания волновых полей в веществе основываются на анализе уравнений Максвелла по отношению к индукциям [1-4]. Однако непосредственно в эксперименте напряженности полей не измеряются по очевидным причинам. В эксперименте измеряется интенсивность волны в зависимости от характеристик рассеивающего объекта.

В связи с этим можно сформулировать следующую постановку задачи: описать взаимодействие поля и вещества посредством плотностей энергии и импульса в соответствии с уравнениями движения электромагнитного поля.

Как известно, уравнения движения динамической системы (уравнения Эйлера-Лагранжа) получаются из вариационного принципа как условие экстремальности некоторого функционала действия. Этот принцип справедлив как для механических систем, так и для полей – систем с бесконечным числом степеней свободы. При этом инвариантность действия относительно определенной группы преобразований координат (внешние симметрии) или калибровочных преобразований (внутренние симметрии) приводит к ковариантным уравнениям движения и к фундаментальным законам сохранения.

Законы сохранения следуют из первой теоремы Нетер [5-7], которая формулируется для глобальных и локальных преобразований симметрии функционала действия. Смысл этой теоремы сводится к следующему. Если действие инвариантно относительно преобразований

глобальных симметрий, образующих некоторую группу Ли [7], то для каждого преобразования симметрии и любого решения уравнений Эйлера-Лагранжа сохраняются величины, называемые токами. Сохранение тока означает, что его 4-дивергенция обращается в ноль. Глобальная инвариантность означает, что параметр преобразования не зависит от точек пространства-времени. В свою очередь интегрирование токов по специально выбранным областям пространства-времени дает соответствующие каждому току сохраняющиеся заряды.

Пусть действие инвариантно относительно трансляций в пространстве-времени. Тогда общее выражение для тока переходит в выражение для тензора энергии-импульса для полей, 4-дивергенция которого в силу первой теоремы Нетер обращается в ноль. Именно 4-дивергенция тензора энергии-импульса дает описание электромагнитного поля как динамической системы.

Отметим, что первая теорема Нетер формулируется для инфинитезимальных (бесконечно малых) трансляций пространства-времени. Группа Ли в формулировке первой теоремы Нетер [6] непосредственно связана с непрерывностью пространственно-временных симметрий. Это обстоятельство в рассматриваемом в дальнейшем случае рентгеновского диапазона длин волн имеет решающее значение.

Поскольку для рентгеновской волны диэлектрическая проницаемость является функцией координат, то непрерывность трансляций в атомарных масштабах несовместима с условием однородности среды. Лишь в частном случае кристаллической среды обеспечивается инвариантность функционала действия, причем лишь по отношению к дискретной, а не непрерывной группе пространственных трансляций на вектора решетки Бравэ. Таким образом, непосредственное применение первой теоремы Нетер для построения тензора энергии-импульса как динамической основы теории с учетом микроскопической структуры среды оказывается невозможным.

2. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ПОЛЯ

В связи со сказанным выше предлагается другой подход, позволяющий получить интересующие нас соотношения непосредственно из уравнений классической макроскопической электродинамики.

Исходим из уравнений Максвелла для поля в отсутствие зарядов и токов в среде:

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (1)$$

Для рентгеновского диапазона длин волн диэлектрическая проницаемость ε, а значит и поляризуемость χ, являются функцией координат:

$$\mathbf{D}=\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}=(1+\chi(\mathbf{r}))\mathbf{E}. \qquad (2)$$

Кроме того, взаимодействие электромагнитных волн со средой и в других диапазонах может описываться формулой (2). Например, искусственные периодические структуры – фотонные кристаллы [8], объекты рентгеновской оптики для мягкого рентгена [9] также формально соответствуют (2), поскольку рассеивающие излучение элементы образуют некоторую пространственную структуру.

В формулах (1), (2) и далее используются стандартные обозначения, ∇ – оператор Гамильтона в некотором декартовом базисе $\mathbf{i}_k$, по немому индексу *k* производится суммирование.

Приведем обобщение на случай ε = ε(**r**) известного в электродинамике вывода закона изменения импульса [10]. Рассмотрим величину $(\nabla\times\mathbf{E})\times\mathbf{D}$ в некотором ортонормированном декартовом базисе $\mathbf{i}_m$:

$$(\nabla\times\mathbf{E})\times\mathbf{D}=\nabla\cdot(\mathbf{DE})-$$
$$-\frac{1}{2}\nabla\cdot(\mathbf{I}\cdot(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}))+\frac{E^2}{2}\nabla\varepsilon. \qquad (3)$$

Аналогично найдем величину $(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{H}$:

$$(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{H}=\nabla\cdot(\mathbf{HH})-\frac{1}{2}\nabla\cdot(\mathbf{I}\cdot H^2). \qquad (4)$$

В (3) и (4) введены величины **DE** = D_iE_j; **HH** = H_iH_j, представляющие собой диады (внешние произведения) [11], а также единичный тензор **I** = $\mathbf{i}_m\mathbf{i}_m$. В дальнейшем выражение вида **ab** будет

означать внешнее произведение векторов **a** и **b**. При выводе (3) и (4) учтено, что согласно уравнениям Максвелла в отсутствие зарядов $(\nabla\cdot\mathbf{D})=0$ и $(\nabla\cdot\mathbf{H})=0$. Отметим, что в силу инвариантности оператора ∇ формулы (3) и (4) справедливы в любом базисе.

Найдем сумму (3) и (4) и, с учетом (1), после ряда преобразований получим

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{DE}+\mathbf{HH}-\frac{1}{2}\mathbf{I}\cdot(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+H^2)\right)+$$
$$+\frac{E^2}{2}\nabla\varepsilon=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{H}).$$

Представим это уравнение в виде

$$\nabla\cdot\mathbf{T}+\frac{E^2}{2}\nabla\varepsilon=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}. \quad (5)$$

Здесь введены следующие величины: тензор напряжений Максвелла в среде **T**

$$\mathbf{T}=\mathbf{DE}+\mathbf{HH}-\frac{1}{2}\mathbf{I}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+H^2)=\mathbf{DE}+\mathbf{HH}-w\mathbf{I}. \quad (6)$$

плотность энергии

$$w=\frac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+H^2). \quad (7)$$

а также объемная плотность полного импульса поля $\mathbf{P}=\frac{1}{c}(\mathbf{D}\times\mathbf{H})$ (кратко будем называть ее импульсом).

Как видно из (5), изменение импульса поля связано в общем случае не только с тензором Максвелла **T**, но также зависит от градиента диэлектрической проницаемости $\nabla\varepsilon$. Согласно (6) с учетом (2) тензор **T** оказывается симметричным.

Теперь образуем выражение $\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$ и с помощью (1) получим:

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=$$
$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})=-\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}. \quad (8)$$

Вычислим дивергенцию с**P**:

$$c(\nabla\cdot\mathbf{P})=\varepsilon\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})+\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{H}).$$

Отсюда

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\frac{1}{\varepsilon}\cdot(\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{H}-\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon^2}\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{H})). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), имеем

$$\nabla\cdot\mathbf{P}-\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\mathbf{P}=-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}. \quad (10)$$

3. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ТЕНЗОРА МАКСВЕЛЛА И УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Уравнения (5) и (10) образуют основную систему для импульса и энергии поля. Они обобщают законы изменения импульса и энергии электромагнитного поля в случае $\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{r})$. Однако система (5), (10) в общем случае оказывается незамкнутой относительно **w** и **P**, поскольку в тензор **T** входят диады **DE** и **HH**. Кроме того, изменение импульса, согласно (5), зависит от амплитуды электрического поля через $E^2/2$. Выясним, с чем это связано, и попытаемся замкнуть систему.

При выводе уравнений (5) и (10) мы пользовались произвольным декартовым базисом, никак не связанным с электромагнитным полем. Однако очевидно, что вид тензора Максвелла **T** зависит от выбора базиса в соответствии с трансформационными свойствами тензора второго ранга. Это обстоятельство позволяет предположить, что динамический характер тензора **T** связан с некоторыми выделенными направлениями в пространстве, и эти направления определяются векторами **D, H** и **P**. Покажем, что это действительно так.

Наиболее простой (канонический) вид тензор **T** имеет в базисе, построенном на собственных векторах. Поскольку тензор **T** симметричный, его канонический вид представляет собой диагональный тензор.

Определим канонический вид тензора Максвелла (6). Для этого найдем собственные значения λ_j и собственные векторы $\mathbf{e}_j$ тензора **T** в нормированном базисе, удовлетворяющие известному уравнению:

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_j=\lambda\mathbf{e}_j. \quad (11)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})=-\lambda^3+\mathbf{I}_1\lambda^2-\mathbf{I}_2\lambda+\mathrm{I}_3=0,$$

где величины I_j – главные инварианты тензора **T**:

$$I_1=Tr(\mathbf{T}),I_2=\frac{1}{2}(Tr(\mathbf{T})^2-Tr(\mathbf{T}^2)),I_3=\det(\mathbf{T}).$$

Здесь $Tr(\mathbf{T})$ – след тензора **T**. Из вида (6) получим одно собственное значение $\lambda_3=-w$. В самом деле, непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I}=\mathbf{DE}+\mathbf{HH}-w\mathbf{I}+w\mathbf{I}=\mathbf{DE}+\mathbf{HH},$$
$$\det(\mathbf{DE}+\mathbf{HH})=0.$$

Найдем собственный вектор $\mathbf{u}_3$, соответствующий $\lambda_3=-w$. Решая (11) для $\lambda_3=-w$, получим

компоненты соответствующего вектора $\mathbf{u}_3$:

$u_{31} = E_2H_3 - E_3H_2, u_{32} = E_3H_1 - E_1H_3, u_{33} = E_1H_2 - E_2H_2,$

которые образуют вектор

$\mathbf{u}_3 = u_{3j}\mathbf{e}_j = \mathbf{E}\times\mathbf{H}.$

Отсюда

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}{|\mathbf{E}\times\mathbf{H}|}.$$

Запишем $\mathbf{T}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_j$:

$$T'_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j$$

$$T'_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -w \end{pmatrix}.$$

Теперь потребуем, чтобы $T_{12} = T_{21} = 0$, тогда, очевидно, $T_{11} = \lambda_1$, $T_{22} = \lambda_2$, и $\mathbf{e}_{1,2}$ – собственные векторы. Получаем условия:

$\mathbf{T}_{12} = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{D})(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{H})(\mathbf{H}\cdot\mathbf{e}_2) = 0,$

$\mathbf{T}_{21} = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{D})(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{H})(\mathbf{H}\cdot\mathbf{e}_1) = 0.$

Отсюда следует

$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{D} = D;\ \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{E} = E;\ \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{H} = 0,$

$\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{D} = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{E} = 0;\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{H} = H.$

Тогда

$$T_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1 = DE - w = \lambda_1 = \frac{1}{2}(DE - H^2);$$

$$T_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2 = H^2 - w = \lambda_2 =$$

$$= -\lambda_1 = \frac{1}{2}(H^2 - DE).$$

И собственные векторы оказываются равными

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{D}}{D} = \frac{\mathbf{E}}{E};\ \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{H}}{H};\ \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{P}}{P}. \qquad (12)$$

Теперь потребуем выполнения дополнительного условия $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, обоснование которого приводится ниже. В этом случае на поля должна быть наложена дополнительная связь $DE = H^2$.

Значит, чтобы тензор $\mathbf{T}$ описывал поле, необходимы следующие условия:

1) Ортогональность полей

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{H} = 0, \qquad (13)$$

2) Связь амплитуд полей

$$DE = \varepsilon E^2 = H^2. \qquad (14)$$

Наличие связи амплитуд полей (14), как будет видно далее, имеет решающее значение для построения замкнутой теории. При этом, если $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ условия (13) и (14) реализуются локально. Кроме того, эти условия для полного поля. Таким образом, мы получаем канонический вид тензора Максвелла $\mathbf{T}$ в базисе $\mathbf{e}_j$:

$$\mathbf{T} = -w(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3).$$

Как видно, тензор Максвелла $\mathbf{T}$ локально определяется плотностью энергии w и направлением переноса импульса e_3. При этом, в соответствии с теоремами о собственных значениях и собственных векторах симметричного тензора собственные значения оказываются вещественными, а собственные векторы, соответствующие этим значениям, ортогональными.

4. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Для обоснования указанных условий обратимся к результатам релятивистской электродинамики. Введем четырехмерный тензор поля F_{ik} [12] в вакууме в пространстве Минковского $R^4_{1,3}$. По определению, инвариантами тензора F_{ik} называются коэффициенты характеристического многочлена

$$P(\lambda) = \det(F_{ik} - \lambda\, g_{ik}),$$

где g_{ik} – метрика Минковского (+,–,–,–).

Прямое вычисление приводит к следующему виду характеристического многочлена:

$$P(\lambda) = -\lambda^4 + (E^2 - H^2)\lambda + (\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2,$$

откуда получаются известные инварианты поля $E^2 - H^2$ и $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$.

Вопрос о приведении кососимметрического тензора поля F_{ik} лоренцевыми преобразованиями к каноническому виду решается следующей теоремой [12].

Теорема. 1. Пусть инварианты поля $E^2 - H^2$ и $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$ не равны нулю.

a) Если $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} \neq 0$, тогда лоренцевым преобразованием можно привести тензор F_{ik} к такому виду, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ параллельны и оба отличны от нуля.

b) Если $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = 0$, $E^2 - H^2 \neq 0$, то можно привести тензор к такому виду, что $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{H} = 0$ при $E^2 - H^2 > 0$ или $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \neq 0$ при $E^2 - H^2 < 0$.

2. Пусть $E^2 - H^2 = 0$ и $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = 0$. Тогда после любого лоренцева преобразования векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ будут взаимно перпендикулярны и равны по длине. Тензор F_{ik} можно привести в этом случае к виду:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нас интересует второй пункт этой теоремы, поскольку он отвечает особому состоянию поля – электромагнитной волне. Именно в этом случае возникают условие связи амплитуд поля и условие поперечности полей. Как видно, условие (14) может рассматриваться как обобщение классического инварианта поля $E^2 - H^2$ на случай электродинамики сплошной среды.

Теперь обоснуем условие $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Как известно, для тензора поля F_{ik} по скалярному лагранжиану

$$L = -\frac{1}{4} F^{ik} F_{ik}$$

строится симметричный четырехмерный тензор энергии-импульса **T**. Явный вид этого тензора определяется из первой теоремы Нетер [7]. Согласно теореме Нетер, поскольку действие для свободного электромагнитного поля в пространстве Минковского инвариантно относительно глобального действия группы Пуанкаре (пространственно-временные трансляции плюс отражения), существует тензор второго ранга, 4-дивергенция которого обращается в ноль:

$$\partial_k T_i^k = 0.$$

Эта величина, называемая током, и есть тензор энергии-импульса:

$$T_i^k = \frac{1}{2}(-F_{ik}F_m^k + \frac{1}{4} g_{ik} F^2) g_{km}.$$

Найдем собственные значения T_i^k:

$$\det(T_i^k - \lambda \delta_i^k) = 0.$$

В силу симметрии тензора T_i^k получаем четыре попарно совпадающих собственных значения:

$$2\lambda_1 = 2\lambda_3 = H^2 + \frac{1}{2}(E^4 + H^4 - 4(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2 + 2E^2H^2)^{1/2},$$

$$2\lambda_2 = 2\lambda_4 = H^2 - \frac{1}{2}(E^4 + H^4 - 4(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2 + 2E^2H^2)^{1/2}.$$

Отсюда видно, что при выполнении условий $E = H$, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = 0$ собственные значения приобретают следующий вид:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = E^2 = w,$$
$$\lambda_2 = \lambda_4 = 0.$$

Таким образом, мы приходим к условию равенства нулю двух собственных значений тензора энергии-импульса. Поскольку тензор Максвелла является пространственной частью тензора энергии-импульса, то ясно, что это условие должно выполняться и для тензора Максвелла **T**, определяемого формулой (6).

Необходимо отметить, что приведенные обоснования использовали тензоры поля и энергии-импульса в вакууме. Полученный же выше вывод для тензора Максвелла является более общим, поскольку мы рассматриваем поле в веществе.

5. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЛОКАЛЬНОМ БАЗИСЕ

Теперь с учетом (14) можно связать плотность энергии поля с амплитудой электрического вектора:

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} D^2 + H^2\right) = \frac{E^2}{2}\varepsilon(1+\varepsilon).$$

Отсюда

$$\frac{E^2}{2} = \frac{w}{\varepsilon(1+\varepsilon)}.$$

В итоге уравнение (5) приобретает компактный вид:

$$\nabla\cdot\mathbf{T} + \frac{w}{\varepsilon(1+\varepsilon)}\nabla\varepsilon = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}. \qquad (15)$$

Таким образом, мы добились, чтобы система (10), (15) оказалась замкнутой относительно **P** и w.

Однако такое «упрощение» не дается даром. Здесь как всегда действует общий принцип: любое обобщение теории при сокращении аксиоматической базы («сущностей») влечет за собой неизбежное усложнение описательных средств, в данном случае математического аппарата. Под обобщением здесь понимается обращение к общефизическим категориям – энергии и импульсу, подчиняющимся глобальным законам сохранения.

Действительно, приведенный выше вывод основных уравнений показывает, что они оказываются справедливыми в наиболее компактном (каноническом) виде только в

специальном локальном базисе. Тем самым мы должны рассматривать все дифференциальные операции в ортогональной криволинейной системе координат, задаваемой базисом (10). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, запишем систему (10), (15) в следующем виде:

$$\nabla'\cdot\mathbf{T}+\frac{w}{\varepsilon(1+\varepsilon)}\nabla'\varepsilon=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$$
$$\nabla'\cdot\mathbf{P}-\frac{\nabla'\varepsilon}{\varepsilon}\mathbf{P}=-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (16)$$

Здесь штрих означает дифференцирование в базисе (12).

Система (16), при внешней формальной простоте, не может быть непосредственно использована для расчета импульса и энергии поля. В самом деле, для решения такой задачи необходимо иметь явные выражения для перехода от локальной системы координат, задаваемой базисом (12), к лабораторной системе координат, в которой и фиксируется эксперимент. Иначе говоря, у нас остается неизвестной геометрия.

Теперь воспользуемся условием локальной ортогональности поля и условием связи амплитуд. Это дает возможность установить связь между геометрией поля и геометрией эксперимента, что и является нашей дальнейшей целью.

Задача разбивается на два этапа. Вначале мы найдем выражения для дивергенции и градиента в полевом базисе через декартовый базис и дополнительную характеристику – локальный поворот базиса. Затем вычислим явный вид вектора угла поворота.

6. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ $\nabla'\cdot\mathbf{P}$, $\nabla'\cdot\mathbf{T}$, $\nabla'\varepsilon$

Прежде всего, необходимо ввести декартовый базис, который будет соответствовать геометрии распространения плоской волны в кристалле как континууме, когда отклик среды на внешнее воздействие сводится к материальному уравнению $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=(1+\chi_0)\mathbf{E}$. Это состояние естественно принять за исходное, по отношению к которому, в процессе взаимодействия рентгеновской волны с кристаллом, происходит локальная вариация базиса $\mathbf{e}_m$. Таким образом, мы будем рассматривать задачу рассеяния в специальном ортонормированном базисе $\mathbf{i}_k$, определяемом векторами $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{P}_0$ в континуальном приближении:

$$\mathbf{i}_1=\frac{\mathbf{D}_0}{D_0};\mathbf{i}_2=\frac{\mathbf{H}_0}{H_0};\mathbf{i}_3=\frac{\mathbf{P}_0}{P_0}.$$

Значит, все дифференциальные операторы необходимо выразить именно в этом базисе.

6.1. Расчет $\nabla'\cdot\mathbf{P}$

Найдем $\nabla\cdot\mathbf{P}$ в базисе $\mathbf{i}_k$. Основная идея расчета заключается в следующем. Из вектора $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ может быть построен тензор второго ранга $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r}$ – производная по направлению. По определению, $\nabla\cdot\mathbf{P}$ есть след тензора $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r}$ как один из его инвариантов. Получим $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{r}$ в бескоординатном виде, используя т.н. производную Гато, или слабую производную. Это понятие является инструментом нелинейного функционального анализа, к которому, в частности, относится классическое вариационное исчисление [13, 14]. Слабая производная определяется через дифференциал Гато (слабый дифференциал), который вводится как предел при $t\to 0$ отображения одного нормированного пространства X в другое Y при приращении $x+th$ элемента пространства X.

Используя представление $\mathbf{P}=P^m\mathbf{e}_m$, получим:

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{r}}=P^m\frac{\partial\mathbf{e}_m}{\partial\mathbf{r}}+\left(\frac{\partial P^m}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{i}_s\right)\cdot(\mathbf{e}_m\mathbf{i}_s).$$

Базис $\mathbf{e}_m$ ортогонален в каждой точке $\mathbf{r}$, поэтому он должен получаться в результате поворота базиса $\mathbf{i}_m$ вокруг некоторой оси на малый угол φ. Ясно, что если поляризуемость $\chi(\mathbf{r})$ постоянна, то угол φ не меняется. Малость угла φ обусловлена малым отличием базисов $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{i}_m$ на величину переменной составляющей $\chi(\mathbf{r})$.

Таким образом, в теорию вводится ключевое понятие – локальный угол поворота базиса $\mathbf{e}_m$. В случае идеального кристалла угол φ определяется трехмерно-периодической поляризуемостью $\chi(\mathbf{r})$ как характеристикой среды.

Вводя вектор $\boldsymbol{\varphi}=\varphi\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ – единичный вектор вдоль оси поворота, для малых φ из теоремы Эйлера [14] получим закон преобразования базиса $\mathbf{e}_m$:

$$\mathbf{e}_m=\mathbf{i}_m+\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{i}.$$

Очевидно, в силу локальности базиса $\mathbf{e}_m$, вектор $\boldsymbol{\varphi}$ есть локальная характеристика среды (полевая переменная): $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$.

Проводя соответствующие выкладки,

получим окончательное выражение для дивергенции импульса:

$$\nabla' \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot \mathbf{P} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{P}). \quad (17)$$

6.2. Расчет $\nabla' \cdot \varepsilon$

Найдем выражение для градиента ε. Будем рассматривать переход от базиса $\mathbf{e}_m$ к базису $\mathbf{i}_m$ как замену переменной скалярной функции векторного аргумента. С учетом связи

$\mathbf{r'} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$,

используя производную Гато, найдем:

$$\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{I} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r},$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}}\right)^T = \nabla \mathbf{r}' = \mathbf{I} - \mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{r} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{r}}\right)^T =$$

$$= \mathbf{I} - \mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{r} \times \nabla \boldsymbol{\varphi}.$$

Здесь знак *T* означает транспонирование.

Тогда градиент ε равен:

$$\nabla \varepsilon = (\mathbf{I} - \mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{r} \times \nabla \boldsymbol{\varphi}) \cdot \nabla' \varepsilon.$$

В итоге, с учетом малости φ, обращая оператор $\mathbf{I} - \mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{r} \times \nabla \boldsymbol{\varphi}$, получим

$$\nabla' \varepsilon = (\mathbf{I} + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r} \times \nabla \boldsymbol{\varphi}) \cdot \nabla \varepsilon. \quad (18)$$

6.3. Расчет $\nabla' \cdot \mathbf{T}$

Для расчета $\nabla' \cdot \mathbf{T}$ этого воспользуемся формулой для дивергенции диады:

$$\nabla \cdot (\mathbf{uv}) = (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{v}),$$

а также известными формулами векторного анализа. Получим:

$$\nabla' \cdot \mathbf{T} = -(\nabla w \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 - (w \nabla \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 -$$

$$-((\nabla \times \varphi) \cdot w\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 + ((\nabla \times w\mathbf{e}_3) \cdot \boldsymbol{\varphi})\mathbf{e}_3 - w\mathbf{e}_3 \cdot (\nabla' \mathbf{e}_3).$$

Используя производную Гато, в первом приближении по φ, получим:

$$\nabla' \cdot \mathbf{T} = -(\nabla w \cdot \mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_3 + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_3) - \quad (19)$$

$$-2w(\nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_3))\mathbf{i}_3.$$

7. РАСЧЕТ ВЕКТОРА ПОВОРОТА φ

Для того чтобы явно учесть локальность базиса, а значит зависимость от χ(**r**), перейдем к не нормированному на единицу ортогональному базису $\mathbf{m}_j$. Новую нормировку выбираем из требования, чтобы при переходе к континуальному приближению (χ(**r**) = χ_0 = const, соответственно, ε(**r**) = ε_0 = const) векторы $\mathbf{m}_j$ переходили в $\mathbf{e}_j$. Тем самым учитывается преломление волны в кристалле:

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\mathbf{D}}{D_0} = \frac{\varepsilon \mathbf{E}}{\varepsilon_0 E} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{m}_2 = \frac{\mathbf{H}}{H_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}}{\sqrt{\varepsilon_0}E} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{m}_3 = \frac{\mathbf{P}}{P_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon}\,|\mathbf{E}|^2}{\sqrt{\varepsilon_0}\,|E|^2}\mathbf{e}_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\mathbf{e}_3.$$

В этом базисе тензор **T** имеет вид

$$\mathbf{T} = -w(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) = -w\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(\mathbf{m}_3\mathbf{m}_3).$$

Коэффициенты Ламе [15] $h_j = |\mathbf{m}_j|$ для базиса $\mathbf{m}_j$ равны

$$h_1 = |\mathbf{m}_1| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}; h_2 = |\mathbf{m}_2| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}; h_3 = |\mathbf{m}_3| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}.$$

Определим микроскопический вектор смещения $\mathbf{u} = \mathbf{m}_j - \mathbf{e}_j$ при переходе от одного базиса к другому вдоль соответствующих направлений осей координат. Отметим, что введенный нами вектор **u**, в отличие от вектора смещения атомных плоскостей в формализме динамической теории рентгеновской дифракции для несовершенных кристаллов [2-4], не является макроскопически усредненной величиной, используемой в континуальной теории упругости [15]. Наш микроскопический вектор смещения **u**, вследствие локальности χ(**r**), изменяется в масштабах элементарной ячейки.

При этом будем считать, что ε(**r**) = ε(**hr**), где **h** – вектор обратной решетки. Тем самым мы фактически используем модель идеального кристалла. Отметим, что это ограничение отнюдь не является принципиальным. При необходимости можно вводить всевозможные отклонения от идеальной периодичности, т.е. проводить обобщение теории на деформированное состояние кристалла. Для определенности выберем стандартную форму поляризуемости, используемую в динамической теории дифракции:

$$\varepsilon = 1 + \chi_0 + \chi_h\left(\exp(i\mathbf{hr}) + \frac{\chi_{\bar{h}}}{\chi_h}\exp(-i\mathbf{hr})\right) = \quad (20)$$

$$= \varepsilon_0 + \chi_h f(\mathbf{hr}).$$

Тогда для микроскопического вектора смещения **u** имеем:

$$\mathbf{u} = (h_j - 1)\mathbf{e}_j = (h_j - 1)\,(\mathbf{i}_j + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_j) \quad (21)$$

Введение вектора **u** фактически означает использование альтернативной концепции описания взаимодействия поля с веществом. При обычном описании мы используем представление о взаимодействии, разворачивающемся в евклидовом пространстве с неизменными метрическими характеристиками. Пространство в этой концепции играет пассивную роль «вместилища» событий.

Альтернативная концепция придает теории геометрическую интерпретацию, которая восходит еще к идее Эйнштейна о том, что геометрия пространства не задается *ad hoc*, а определяется взаимодействием, в данном случае поля и вещества. Таким образом, геометрия приобретает динамический характер [6].

В данном случае реакция среды на внешнее возмущение рассматривается как локальное изменение геометрии – поворот базиса, определяемое структурными характеристиками среды. Или, иначе, взаимодействие меняет геометрию.

Далее используем результаты линейной теории упругости [16], в которой малые смещения среды рассматриваются как полевые переменные, определяющие симметричный тензор деформации $\varepsilon(\mathbf{r})$ и антисимметричный тензор вращений $\omega(\mathbf{r})$. Как известно, любому антисимметричному тензору ставится в соответствие дуальный ему вектор. Этим вектором в случае $\omega(\mathbf{r})$ оказывается аксиальный вектор малых вращений $\boldsymbol{\varphi}$. Геометрический смысл вектора $\boldsymbol{\varphi}$ заключается в повороте окрестности заданной точки среды как целого вокруг оси вращения, при этом угол и направление поворота совпадают соответственно с длиной и направлением вектора $\boldsymbol{\varphi}$.

Исходя из этой интерпретации, в теории упругости выводится следующее фундаментальное соотношение, определяющее вектор поворота $\boldsymbol{\varphi}$ через ротор вектора смещения [16]:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}. \tag{22}$$

Согласно (22), используя (21), получим:

$$2\boldsymbol{\varphi} = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (h_j - 1)(\mathbf{i}_j + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_j) =$$
$$= \nabla(h_j - 1) \times \mathbf{i}_j + \nabla \times ((h_j - 1)(\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_j)).$$

Или, с учетом (20) и малости χ:

$$2\boldsymbol{\varphi} = \frac{\chi_h}{2}\nabla f \times (2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) + \frac{\chi_h}{2}\nabla \times (f(2\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_1 + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_2 + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_3). \tag{23}$$

Решение уравнения (23) ищем в виде разложения в ряд по малому параметру χ_h:

$$\varphi = \varphi_0 + \chi_h\varphi_1 + \ldots$$

Действуя стандартным методом теории возмущений, получаем решение в нулевом приближении $\varphi_0 = 0$ и приближении первого порядка:

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \frac{1}{4}(\nabla f \times (2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)).$$

Тогда решение уравнения (23) в приближении первого порядка примет вид:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\nabla\chi}{4} \times (2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3). \tag{24}$$

Согласно (24), величина $\boldsymbol{\varphi}$ является локальной мерой отклонения геометрических характеристик среды по отношению к распространению электромагнитных волн от континуального приближения.

Вектор $\boldsymbol{\varphi}$ при условии $\chi = \chi(\mathbf{hr})$ т.е. если кристалл идеальный, сохраняет ориентацию в пространстве и не совпадает с базисными векторами $\mathbf{i}_m$. Если бы он совпадал с $\mathbf{i}_1$, то реализовывалась бы σ-поляризация, а если бы с $\mathbf{i}_2$ – π-поляризация. Следовательно, при прохождении волны реализуется суперпозиция σ- и π-поляризаций, и это, по-видимому, общий результат. Отсюда вывод: разделение волн на поляризации при рассмотрении задач рассеяния рентгеновской волны на кристалле не вполне корректно даже в случае идеального кристалла.

Разумеется, сохранение ориентации вектора $\boldsymbol{\varphi}$ в пространстве есть специфическое свойство только идеального кристалла. В других случаях, скажем при учете деформации кристалла, вектор $\boldsymbol{\varphi}$ будет локально менять свою ориентацию в пространстве, например, прецессировать вокруг первоначального направления, соответствующего идеальному кристаллу.

8. ВЫВОД ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ДЕКАРТОВОМ БАЗИСЕ

Линеаризуем фундаментальную систему (16) по малой величине χ.

$$\nabla' \cdot \mathbf{T} + w\nabla\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{P} - \nabla\varepsilon\mathbf{P} = -\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Тогда, используя явные выражения для дивергенций и градиента (17-19), получим:

$$\begin{aligned} &-(\nabla w \cdot \mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_3 + \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{i}_3) - 2w(\nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_3))\mathbf{i}_3 + \\ &+ w\nabla\chi = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \\ &\nabla \cdot \mathbf{P} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{P}) - \nabla\chi \cdot \mathbf{P} = -\frac{1+\chi(\mathbf{r})}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned} \tag{25}$$

Эти соотношения представляют собой фундаментальные уравнения изложенной выше теории, которые позволяют рассчитывать импульс и энергию поля при его взаимодействии с кристаллом. Как и в обычной динамической теории дифракции (скажем, уравнения Такаги) такое взаимодействие носит параметрический характер, а значит, при определенных геометрических условиях должен наблюдаться параметрический резонанс. Разумеется, следует ожидать, что эти условия соответствуют уравнению Лауэ, а резонанс физически соответствует возникновению дифракционной волны (в терминах данной теории – появлению соответствующей компоненты полного импульса).

Уравнения (25), в отличие от уравнений дифракции для полей, параметрически зависят не только от χ, а от $\nabla\chi \sim \mathbf{h}$. Отметим, что уравнения являются линейными, что позволяет при построении решения использовать принцип суперпозиции.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наметим дальнейшее развитие теории применительно к описанию дифракционного рассеяния в кристалле. Основные уравнения (25), очевидно, не могут быть решены точно, поэтому необходимо воспользоваться методами теории возмущений. При этом в качестве малого параметра, как и в теории [3,4], используется фурье-компонента поляризуемости χ_h, которая связана с дифракционным рассеянием. Невозмущенные уравнения (нулевое приближение)

$$\begin{aligned} &-(\nabla w_0 \cdot \mathbf{i}_3)\mathbf{i}_3 = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \\ &\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1+\chi_0}{c^2}\frac{\partial w_0}{\partial t} \end{aligned} \tag{26}$$

описывают распространение импульса-энергии в среде как в континууме.

При этом, в отличие от обычных волновых уравнений, физическое решение для нулевого приближения образуется не из гармонических волн а из их произведений. В самом деле, для гармонических волн имеет место зависимость:

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{E}e^{I\psi} \times \mathbf{H}e^{I\psi} \sim EHe^{I2\psi}$$

$$w \sim (Ee^{I\psi})^2 + (He^{I\psi})^2 \sim EHe^{I2\psi}.$$

Тогда для $\mathbf{P}_0$ и w_0 следует выбрать функционально инвариантные решения в виде квадратов гармонических волн, содержащие постоянные (неосциллирующие) составляющие. Очевидно, именно эти составляющие фиксируются в эксперименте. Такие решения не являются гармоническими, поэтому нельзя путем простой подстановки избавиться от производных по времени и перейти к чисто пространственной задаче. Следовательно, необходимо развивать теорию возмущений для системы уравнений в частных производных типа (26).

Эта задача является предметом дальнейшего исследования.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает глубокую признательность профессору Ю.П. Хапачеву за ряд ценных замечаний по существу работы и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. James RW. *The Optical Principles Of The Diffraction Of X Rays. Vol II.* London, G. Bell and sons Ltd, 1962, 664 p.
2. Пинскер ЗГ. *Рентгеновская кристаллооптика.* М., Наука, 1982, 392 с.
3. Дышеков АА, Хапачев ЮП. *Новые аналитические подходы к задачам рентгенодифракционной кристаллооптики.* Нальчик, Изд. Каб.-Балк. гос. ун-та, 2010, 45 с.
4. Dyshekov AA. Generalization of the nonstandard approach in the dynamic theory of diffraction for deformed crystals. *Crystallography Reports,* 2013, 58(7):984-989.

5. Полак ЛС (ред.). *Вариационные принципы механики. Сб. статей классиков науки*. М., Физматлит, 1959, 932 с.
6. Коноплева НП, Попов ВН. *Калибровочные поля*. М., Атомиздат, 1972, 240 с.
7. Катанаев МО. *Геометрические методы в математической физике*. М.-Казань, Изд. МИ РАН-КФУ, 2016, 1570 с.; https://arxiv.org/pdf/1311.0733.
8. Lourtioz J.-M., Benisty H., Berger V., Gerard J.-M, Maystre D., Tchelnokov A. *Photonic crystals. Towards Nanoscale Photonic Devices*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, 514 p.; DOI: 10.1007/978-3-540-78347-3.
9. Аристов ВВ, Шабельников ЛГ. Современные достижения рентгеновской оптики преломления. *УФН*, 2008, 178(1):61-83.
10. Новожилов ЮВ, Яппа ЮА. *Электродинамика*. М., Наука, 1978, 352 с.
11. Федоров ФИ. *Теория гиротропии*. Минск. Наука и техника, 1976, 456 с.
12. Дубровин БА, Новиков СП, Фоменко АТ. *Современная геометрия. Методы и приложения*. М., Наука, 1986, 760 с.
13. Колмогоров АН, Фомин СВ. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М., Наука, 1981, 544 с.
14. Вильчевская ЕН. *Тензорная алгебра и тензорный анализ. Учебное пособие*. СПб., Изд. СПбГТУ, 2012, 45 с.
15. Лурье АИ. *Теория упругости*. М., Наука, 1970, 940 с.
16. Сиротин ЮИ, Шаскольская МП. *Основы кристаллофизики*. М., Наука, 1975, 680 с.

Дышеков Артур Альбекович
д.ф.-м.н., проф.
Кабардино-Балкарский государственный университет им Х.М. Бербекова
173, ул. Чернышевского, Нальчик 360004, Россия
dyshekov@yandex.ru

FUNDAMENTAL SYSTEM OF EQUATIONS FOR MOMENTUM AND ENERGY OF ELECTROMAGNETIC FIELD IN INHOMOGENEOUS MEDIUM

Arthur A. Dyshekov
Berbekov Kabardino-Balkarian State University, http://www.kbsu.ru/
Nalchik 360004, Russian Federation
dyshekov@yandex.ru

Abstract. **An alternative approach to the description of the interaction of the electromagnetic field with the crystal is proposed, in which the main characteristics are the energy and pulse densities. The reaction of the medium to the external perturbation is considered as a local change in geometry – the rotation of the orthogonal basis built on the induction vectors and the pulse of the field, determined by the structural characteristics of the medium. The equations that allow calculating the momentum and energy of the field in its interaction with the crystal are obtained.**

Keywords: **Energy-momentum tensor, electromagnetic field, Maxwell tensor, Gâteaux derivative, canonical form of the field tensor**

PACS: 61.05.C

Biblography – 16 references *Received 13.06.18, accepted 13.01.19*

RENSIT, 2019, 11(2):103-112 **DOI: 10.17725/rensit.2019.11.103**