DOI: 10.17725/rensit.2019.11.351

Моделирование вертикальных трещин с помощью модели Шонберга на структурированных сетках сеточно-характеристическим методом

[1]Стогний П.В., [2]Хохлов Н.И., [2]Петров И.Б.

[1]Учебно-научно-производственный комплекс Московского физико-технического института, http://kmipt.ru/ г. Долгопрудный 141700, Московская область, Российская Федерация

[2]Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, https://www.niisi.ru/ Москва 117218, Российская Федерация

E-mail: stognii@phystech.edu, k_h@inbox.ru, petrov@mipt.ru

Поступила 28.08.2019, рецензирована 16.09.2019, принята 30.09.2019

Аннотация. **Сейсморазведка — наиболее распространенный метод обнаружения нефтяных и газовых залежей в Северных морях. Часто геологические среды, содержащие залежи углеводородов, включают в себя различные неоднородности, например, трещины. Моделированию трещин и способам их учета в различных постановках задач посвящено множество работ, но до сих пор наиболее актуальной является модель Шонберга, разработанная еще в конце прошлого века. Данная модель характеризуется наличием дополнительного, характеризующего трещины параметра — параметра раскрытости трещины. В данной работе представлен алгоритм внедрения модели трещины Шонберга в сеточно-характеристический метод. Трещина, организованная параллельно границам ячеек сетки, расположена на границе раздела сред с одинаковыми параметрами. Подробно описан алгоритм вычисления значений скорости и тензора напряжений в точках на границе с трещиной. Для проверки корректности разработанного подхода к моделированию трещины с помощью модели Шонберга проведен тестовый расчет распространения сейсмических волн в однородной среде с вертикальной бесконечно тонкой трещиной с ненулевой нормальной компонентой коэффициента раскрытости трещины и нулевой тангенциальной компонентой коэффициента раскрытости трещины.**

Ключевые слова: **сейсморазведка, численное моделирование, сеточно-характеристический метод, трещиноватые среды**

УДК 519.63

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00281.

Для цитирования: Стогний П.В., Хохлов Н.И., Петров И.Б. Моделирование вертикальных трещин с помощью модели Шонберга на структурированных сетках сеточно-характеристическим методом. *РЭНСИТ*, 2019, 11(3)351-356. DOI: 10.17725/rensit.2019.11.351.

Modeling vertical fractures using the Schoenberg model on structured grids by grid-characteristic method

Polina V. Stognii

Educational Scientific and Experimental Center of Moscow Institute of Physics and Technology, http://kmipt.ru/ Dolgoprudny 141700, Moscow region, Russian Federation

E-mail: stognii@phystech.edu

Nikolay I. Khokhlov, Igor B. Petrov

Scientific Research Institute for System Analysis of Russian Academy of Sciences, https://www.niisi.ru/ Moscow 117218, Russian Federation

E-mail: k_h@inbox.ru, petrov@mipt.ru

Received 28.08.2019, peer reviewed 16.09.2019, accepted 30.09.2019

Abstract. **Seismic prospecting is one of the most popular method of revealing oil and gas reservoirs in the North seas. Geological media, which contain hydrocarbon layers, often include different heterogeneities, for example, fractures. Many scientific works are devoted to modelling fractures and ways of considering them in various mathematical problems, but the Linear Slip model, known as Schoenberg model of fracture, is still the most actual, though this model was developed at the end of the last century. This model is characterized by the presence of an additional parameter — so called fracture opening parameter, describing fractures. In this work, we present the algorithm of introducing the Schoenberg fracture model in the grid-characteristic method. The fracture is organized to be parallel to the boundaries of the modelling grid. The fracture is situated on the border of the two media with the same characterizing parameters. We describe in detail the algorithm of computing the meanings of velocity and stress tensor in the points on the border with the fracture. In order to verify the correctness of the developed approach to modelling a fracture using the Schoenberg fracture model, we carry out the test calculations of sesmic waves spread in a homogeneous media with the vertical extremely thin fracture, described by the not equal to null normal component of the fracture opening coefficient and with the equal to null tangential component of the fracture opening coefficient.**

Keywords: **seismic prospecting, numerical modelling, grid-characteristic method, fractured media**

UDC 519.63

*Acknowledgments***:** This work was financially supported by the Russian Federal Property Fund in the framework of scientific project No. 19-01-00281.

For citation: Polina V. Stognii, Nikolay I. Khokhlov, Igor B. Petrov. Modeling vertical fractures using the Schoenberg model on structured grids by grid-characteristic method. *RENSIT*, 2019, 11(3):351-356; DOI: 10.17725/rensit.2019.11.351.

Содержание

1. **Введение (352)**
2. **Определяющие уравнения (353)**
3. **Численный метод (353)**
4. **Результаты (354)**
5. **Заключение (355)**

Литература (356)

1.ВВЕДЕНИЕ

Во время проведения геологоразведочных работ по добыче нефтяных и газовых залежей частым препятствием на пути исследования рассматриваемой территории становятся трещины геологических сред [1, 2]. Они вносят существенный вклад в сейсмограммы, получаемые в результате исследований геологических сред. Поэтому при проведении моделирования рассматриваемой территории следует учитывать трещиноватые породы с целью получения более точных результатов обработки сейсмических данных.

В реальном мире размеры большинства трещин такие, что отношение их толщины к высоте в пределе равно нулю [3]. Такие трещины описываются абстрактной моделью бесконечно тонкой трещины. В данной работе рассматриваются только модели бесконечно тонких трещин. Трещина описывается набором контактных и граничных условий в месте ее расположения в расчетной области.

Существуют различные способы моделирования распространения сейсмических волн в трещиноватых средах. Например, для моделирования статических трещин, могут применяться иерархические сетки [4]. В работе [5] авторы использовали псевдоспектральный метод для моделирования трещин с ненулевым параметром вязкости.

Наиболее известными моделями, которые используются для описания трещин, являются модель Хадсона [6] и модель Шонберга [7]. В модели Хадсона трещина описывается с помощью параметра эффективной жесткости, который зависит линейно или квадратично (соответственно, первый или второй порядок точности) от так называемого параметра плотности трещины [8].

В модели Шонберга [9, 10] на границе трещины ставится условие равенства нормальных компонент тензора напряжений, а также предлагается способ вычисления нормальных компонент через специальные параметры раскрытости трещины, зависящие от среды, заполняющей саму трещину. Модель Шонберга была уже внедрена в широко известный метод

Галеркина, результат можно найти в работе [11].

В данной работе представлен метод расчета геологических сред с трещиной с помощью сеточно-характеристического метода и внедренной модели Шонберга для двумерного случая, что для данного метода делается впервые. Подробно описаны контактные условия на границе с трещиной. Также, приводится пример численного моделирования сейсмического отклика от трещины на границе раздела сред.

2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Для описания распространения упругих волн в однородной среде использовалась система линейно-упругих уравнений [12]:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \upsilon = \left(\nabla \cdot \sigma\right)^T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma = \lambda \left(\nabla \cdot \upsilon\right) I + \mu \left(\left(\nabla \times \upsilon\right) + \left(\nabla \times \upsilon\right)^T \right), \tag{2}$$

где ρ – плотность среды, υ – скорость распространения упругих волн в среде, σ – тензор напряжений Коши, λ и μ – параметры, определяющие свойства упругого материала.

Для задания трещины, использовались уравнения из модели Шонберга [13]:

$$\sigma_{xx}^{left} = \sigma_{xx}^{right}, \tag{3}$$

$$\sigma_{xy}^{left} = \sigma_{xy}^{right}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = K_N \left(v_x^{\grave{u}\grave{u}\grave{u}\grave{u}} - v_x \right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = K_T \left(v_y^{\grave{u}\grave{u}\grave{u}\grave{u}} - v_y \right). \tag{6}$$

В (3)-(6) индексы «left» и «right» означают среды с одной стороны (левой) и с другой стороны (правой) от трещины. K_N и K_T – нормальная и тангенциальная составляющие параметры раскрытости трещины. Данные характеристики трещины заранее известны или могут быть вычислены. Описание теоретического вычисления нормальной и тангенциальной составляющих раскрытости трещины представлено в статье [14], вычисление параметра раскрытости в результате лабораторного эксперимента представлено в статье [15]. Ширина трещины считается бесконечно малой.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для решения системы линейно-упругих уравнений (1), (2) использовался сеточно-характеристический метод [16]. Для расчета однородной среды использовалась схема Лакса-Вендроффа 2-го порядка точности [17]:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ct}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \\ + \frac{c^2 t^2}{2h^2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n\right). \tag{7}$$

Для расчета трещин также использовался сеточно-характеристический метод, но с некоторыми модификациями. Рассмотрим алгоритм вычисления точек на границе трещины более подробно.

Для этого, представим систему уравнений (1), (2) в виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A_x \frac{\partial q}{\partial x} + A_y \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \tag{8}$$

где $q = \{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \upsilon_x, \upsilon_y\}$, A_x и A_y – матрицы, составленные из соответствующих компонент уравнений (1), (2):

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{p} \\ -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{p} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{p} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В результате применения метода расщепления по пространственным координатам, получим две одномерных системы уравнений:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A_i \frac{\partial q}{\partial i} = 0, \quad i = x, y. \tag{11}$$

Рассмотрим систему уравнений (11) для координаты x:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A_x \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

Здесь и далее считаем, что трещина расположена перпендикулярно оси координат x, параллельно границам ячеек расчетной сетки. Аналогичные преобразования, представленные ниже, можно привести для случая, когда трещина расположена перпендикулярно оси координат y.

Система уравнений (12) — гиперболическая, поэтому ее можно представить в виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \Omega_x \Lambda_x \Omega_x^{-1} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

где Ω_x – матрица, составленная их собственных векторов, Λ_x – матрица с собственными значениями на диагонали. Собственными значениями матриц A_x, A_y являются: $\{-c_p, c_p, -c_s, c_s, 0\}$, где c_p – продольная скорость звука, c_s – поперечная скорость звука.

После замены переменных $p = \Omega_x^{-1} q$, система (13) будет выглядеть:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \Lambda_x \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (14)$$

Система (14) представляет собой 5 независимых уравнений, которые можно решить любой стандартной схемой [17].

Рассмотрим случай расчета точек на границе трещины с помощью схемы Куранта-Изаксона-Рисса (CIR) [17]. Сама схема выглядит так:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ct}{h}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right), \text{ если } c > 0, \quad (15)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{ct}{h}\left(u_{i-1}^n - u_i^n\right), \text{ если } c < 0. \quad (16)$$

В (15), (16) индекс i означает шаг по координате (например, x), индекс n – шаг по времени, t – шаг по времени, h – шаг по координате, c – скорость. Из уравнений (15), (16) следует, что точки слева от трещины можно вычислить только для векторов, соответствующих отрицательным собственным значениям ($-c_p$, $-c_s$), а справа от трещины - только для векторов, соответствующих положительным собственным значениям (c_p, c_s). Для решения оставшихся двух систем уравнений слева и справа нужны дополнительные граничные условия (3)-(6).

Рассмотрим подробнее алгоритм вычисления точек слева от трещины для положительных характеристик (алгоритм вычисления точек справа от трещины для отрицательных характеристик будет аналогичным). Для этого внедрим дополнительный ghost-узел *border+1* справа от граничного узла [18] в рассматриваемую расчетную сетку и поместим такие значения в узел *border+1*, чтобы на границе трещины выполнялись условия (3), (4) на следующем шаге по времени. Условия (5), (6) позволяют вычислить значения σ_{xx}, σ_{xy} на $(n+1)$-м шаге по времени. Уравнения (5), (6) в данной работе решались с помощью метода Эйлера:

$$\sigma_{xx}^{left,n+1} = \sigma_{xx}^{left,n} + K_N\left(v_x^{right,n} - v_x^{left,n}\right), \quad (17)$$

$$\sigma_{xy}^{left,n+1} = \sigma_{xy}^{left,n} + K_T\left(v_y^{right,n} - v_y^{left,n}\right). \quad (18)$$

Для описания граничных условий использовались не отражающие граничные условия [19]:

$$\Omega^{out} u = 0, \quad (19)$$

где Ω^{out} – матрица из собственных векторов, соответствующих выходящим характеристикам (то есть отрицательным значениям характеристик матриц A_x, A_y).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Было проведено численное моделирование сейсмического отклика от бесконечной трещины в однородной среде для двумерной постановки задачи. Начальный импульс был задан с помощью определения тензора напряжений в единичной окружности следующей формулой:

$$\sigma_{xx}(x,y) = \sigma_{yy}(x,y) =$$
$$= \exp\left(\frac{-(x-2.2)^2}{0.035} - \frac{(y-3.0)^2}{0.035}\right), \quad (20)$$
$$1.7 < x < 2.7, 2.5 < y < 3.5.$$

Однородная среда задавалась следующими параметрами. Скорость продольных волн была равна 2 м/с, скорость поперечных волн – 1 м/с. Плотность среды составляла 1 кг/м^3. Расчетная область составляла 9 м вдоль координаты x и 6 м вдоль координаты y. Бесконечно тонкая трещина вдоль всей расчетной области была расположена вертикально на границе $x = 3$ м (**рис. 1***а*).

В расчетах, шаг по времени составлял 0.005 сек., шаг по координатам x, y – 0.025 м. Значение нормальной компоненты коэффициента раскрытости трещины K_N составляло 400 Па/м, касательной компоненты коэффициента

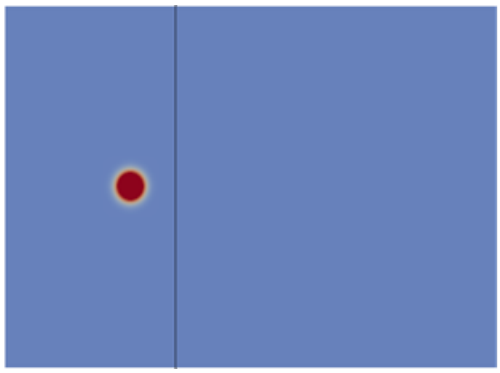

Рис. 1*a. Волновая картина распространения сейсмического импульса (нормальной компоненты тензора напряжений* σ_{xx}*) в однородной среде в начальный момент времени.*

раскрытости трещины K_T – 0 Па/м. Слева и справа от трещины располагается одна и та же среда с параметрами, приведенными ранее в данной работе. Распространение сейсмического импульса в левой и правой областях относительно трещины считались независимо, за исключением границы, на которой происходил обмен значениями нормальной и касательной компонент тензора напряжений Коши (в соответствии с граничными условиями (3)-(6)). На данном этапе все вычисления проводились последовательно, в дальнейшем же это поможет существенно ускорить расчеты при распараллеливании расчетов, например, с помощью технологии MPI [20].

Волновые картины распространения сейсмического импульса (а именно — компоненты тензора напряжений σ_{xx}) представлены на **рис. 1***a,b,c*. На волновой картине рис. 1*a* импульс изображен в начальный момент времени. На рис.1*b*, 1*c* представлены последовательные моменты отражения сейсмической волны от трещины и ее дальнейшее распространение в

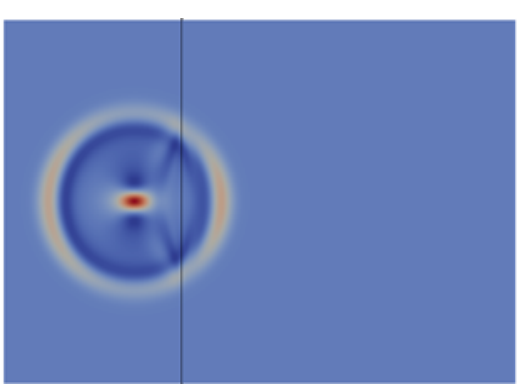

Рис. 1*b. Волновая картина распространения сейсмического импульса (нормальной компоненты тензора напряжений* σ_{xx}*) в однородной среде в момент времени 0.7 сек.*

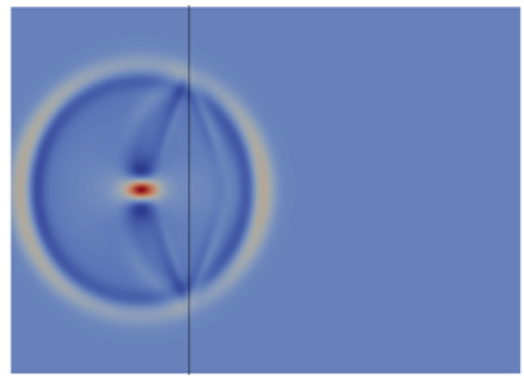

Рис. 1*c. Волновая картина распространения сейсмического импульса (нормальной компоненты тензора напряжений* σ_{xx}*) в однородной среде в момент времени 1 сек.*

однородной среде: *b*) импульс в момент времени 0.7 сек., *c*) импульс в момент времени 1 сек.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлена реализация модели Шонберга в сеточно-характеристическом методе. Модель Шонберга, широко используемая при моделировании трещиноватых сред, была внедрена в сеточно-характеристический метод с помощью добавления соответствующих граничных условий в том месте расчетной области, где расположена трещина. Представлено подробное описание расчета точек на границе с трещиной для двумерного случая. Граничные условия были реализованы с помощью схемы Куранта-Изаксона-Рисса (CIR) первого порядка точности, в то время как остальные точки расчетной области считались с помощью схемы Лакса-Вендроффа второго порядка точности.

В качестве примера, был проведен тестовый расчет распространения сейсмической волны в однородной среде с вертикальной трещиной для случая, когда касательная компонента параметра раскрытости трещины равна нулю. Волновые картины для нормальной компоненты тензора напряжений показали отраженный импульс от трещины, а также дальнейшее распространение сейсмической волны в однородной среде.

В дальнейшем, планируется сделать распараллеливание представленного алгоритма расчета распространения сейсмических волн в однородной среде с трещиной, что позволит существенно ускорить расчеты. Также логичным продолжением представленной работы является разработка аналогичного алгоритма расчета трещиноватых сред для трехмерного случая.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ I в рамках научного проекта № 19-01-00281.

ЛИТЕРАТУРА

1. Muratov MV, Petrov IB. Application of Fractures Mathematical Models in Exploration Seismology Problems Modeling. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-06228-6_11.
2. Bakulin A, Grechka V, Karaev N, Anisimov A, Kozlov E. Physical modeling and theoretical studies of seismic reflections from a fault zone. *SEG Ann. Mtg.*, 2004, 1674-1677.
3. Левянт ВБ, Миряха ВА, Муратов МВ, Петров ИБ. Оценка влияния на сейсмический отклик степени раскрытости трещины и доли площади локальных контактов к ее поверхности. *Технологии сейсморазведки,* 2015, 3:16-30.
4. Левянт ВБ, Муратов МВ, Петров ИБ. Численное моделирование волновых откликов от системы (кластера) субвертикальных макротрещин. *Технологии сейсморазведки,* 2012, 1:5-21.
5. Carcione J. Scattering of elastic waves by a plane crack of finite width in a transversely isotropic medium. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 1998, 22(4):263-275.
6. Hudson JA. Overall properties of a cracked solid. *Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 1980, 88:371-384.
7. Schoenberg M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces. *Journal of the Acoustical Society of America,* 1980, 68(5):1516-1521.
8. Grechka V, Kachanov M. Effective elasticity of fractured rocks: A snapshot of the work in progress. *Geophysics*, 2006, 71:W95-W98.
9. Qiwei Zhan, Qingtao Sun, Qiang Ren, Yuan Fang, Hua Wang, Qing Huo Liu. A discontinuous Galerkin method for simulating the effects of arbitrary discrete fractures on elastic wave propagation. *Geophysical Journal International.* 2017, 210(2):1219-1230.
10. Coates RT, Schoenberg M. Finite-difference modelling of faults and fractures. *Geophysics*, 1995, 60:1514-1523.
11. Zhan Q, Sun Q, Zhuang M, Mao Y, Ren Q, Fang Y, Huang W, Liu Q. A new upwind flux for a jump boundary condition applied to 3D viscous fracture modeling. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2018, 331:456-473.
12. Новацкий ВК. *Теория упругости.* М., Мир, 1975.
13. Hsu C-J, Schoenberg M. Elastic waves through a simulated fractured medium. *Geophysics,* 1993, 58(7):964-977.
14. Liu E, Hudson JA, Pointer T. Equivalent medium representation of fractured rock. *J. Geophys. Res.*, 2000, 105:2981-3000.
15. Zhang J. Elastic wave modeling in fractured media with an explicit approach. *Geophysics*, 2005., 70:75-T85.
16. Магомедов КМ, Холодов АС. Сеточно-характеристические численные методы. М., Наука, 1988.
17. Петров ИБ, Лобанов АИ. *Лекции по вычислительной математике.* М., Изд.интернет-университета информационных технологий, 2006.
18. LeVeque R. *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
19. Petrov D. Application of grid-characteristic method to some seismic exploration problems in the Arctic. *Journal of Physics*, 2018, 955(1).
20. Ivanov A, Khokhlov N. Efficient inter-process communication in parallel implementation of grid-characteristic method. *Smart Innovation, Systems and Technologies,* 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-06228-6_9.

Стогний Полина Владимировна
аспирант
УНПК Московского физико-технического института
Долгопрудный 141700, Московская обл., Россия
stognii@phystech.edu

Хохлов Николай Иванович
к.ф.-м.н., с.н.с.
НИИ системных исследований РАН
Москва 117218, Россия
k_h@inbox.ru

Петров Игорь Борисович
д.ф.-м.н., чл.-корр РАН, действ. член РАЕН
НИИ системных исследований РАН
Москва 117218, Россия
petrov@mipt.ru.