

DOI: 10.17725/rensit.2021.13.079

Математическое моделирование воздействия температурных изменений на искусственные ледовые острова

Муратов М.В., Бирюков В.А., Конов Д.С., Петров И.Б.

Московский физико-технический институт, кафедра вычислительной физики, <https://mipt.ru/>
г. Долгопрудный 141701, Московская область, Российская Федерация

E-mail: max.muratov@gmail.com, biryukov.vova@gmail.com, konov1999@gmail.com, petrov@mipt.ru

Поступила 21.12.2020, рецензирована 26.12.2020, принята 29.12.2020

Аннотация: Статья посвящена численному решению задачи Стефана для термических воздействий на искусственный ледовый остров. Для современных задач освоения Арктики, связанных с разведкой и добычей полезных ископаемых, актуально создание искусственных ледовых островов в Арктическом шельфе, в связи со скоростью их возведения, экономической целесообразностью и другими факторами. Важнейшей задачей эксплуатации таких островов является их устойчивость, в том числе к таянию. В данной работе обсуждается вопрос устойчивости ледовых островов к таянию. Для этого сформулирована задача Стефана об изменении фазового состояния вещества. Построен энтальпийный метод решения, рассмотрена применимость этого метода. Для численного решения применяется схема Писмена-Рекфорда, которая является безусловно спектрально устойчивой в двумерном случае, что позволяет свободно выбирать шаг по времени. Кроме того, разработанный подход учитывает течение воды и стекание растаявшей воды, что важно в поставленной задаче. Разработанные вычислительные алгоритмы распараллелены для использования на современных многопроцессорных вычислительных системах. Реализован подход для моделирования тепловых процессов в толще произвольного массива веществ с учетом произвольных начальных условий, условий внешней среды, приливных течений воды, солнечного излучения. С помощью этой подхода произведен расчет распределения температуры в толще ледового острова, а также проведены исследования воздействия сезонных температурных изменений на устойчивость острова.

Ключевые слова: математическое моделирование, ледовый остров, задача Стефана, энтальпийный подход, схема Писмена-Рекфорда

УДК 004.94

Благодарности: Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда №19-11-00023.

Для цитирования: Муратов М.В., Бирюков В.А., Конов Д.С., Петров И.Б. Математическое моделирование воздействия температурных изменений на искусственные ледовые острова.

РЭНСИТ, 2021, 13(1):79-86. DOI: 10.17725/rensit.2021.13.079.

Mathematical modeling of temperature changes impact on artificial ice islands

Maxim V. Muratov, Vladimir A. Biryukov, Denis S. Konov, Igor B. Petrov

Moscow Institute of Physics and Technology, <https://mipt.ru/>

Dolgoprudny 141701, Moscow region, Russian Federation

E-mail: max.muratov@gmail.com, biryukov.vova@gmail.com, konov1999@gmail.com, petrov@mipt.ru

Received December 21, 2020, peer-reviewed December 26, 2020, accepted December 29, 2020

Abstract: The article is devoted to the numerical solution of the Stefan problem for thermal effects on an artificial ice island. For modern tasks of the development of the Arctic, associated with the exploration and production of minerals, it is important to create artificial ice islands in the Arctic shelf, due to the speed of their construction, economic feasibility and other factors. The most important task for the exploitation of such islands is their stability, including against melting. This

paper discusses the issue of the stability of ice islands to melting. For this, the Stefan problem on the change in the phase state of matter is formulated. An enthalpy solution method is constructed, and the applicability of this method is considered. For the numerical solution, the Peasman-Reckford scheme is used, which is unconditionally spectrally stable in the two-dimensional case, which allows to freely choose the time step. In addition, the developed approach takes into account the flow of water and the flow of melted water, which is important in the task at hand. The developed computational algorithms are parallelized for use on modern multiprocessor computing systems. An approach is implemented for modeling thermal processes in the thickness of an arbitrary mass of substances, taking into account arbitrary initial conditions, environmental conditions, tidal currents of water, and solar radiation. This approach was used to calculate the temperature distribution in the thickness of the ice island, as well as to study the impact of seasonal temperature changes on the stability of the island.

Keywords: mathematical modeling, ice island, Stefan problem, enthalpy method, Peasman-Reckford scheme

UDC 004.94

Acknowledgments: The work was carried out within the framework of the project of the Russian Science Foundation No. 19-11-00023.

For citation: Maxim V. Muratov, Vladimir A. Biryukov, Denis S. Konov, Igor B. Petrov. Mathematical modeling of temperature changes impact on artificial ice islands. *RENSIT*, 2021, 13(1):79-86. DOI: 10.17725/rensit.2021.13.079.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ (80)
 2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ (81)
 - 2.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ (81)
 - 2.2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД (81)
 - 2.3. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ (82)
 3. РЕЗУЛЬТАТЫ (83)
 - 3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (83)
 - 3.2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧИ В ПОСТАНОВКЕ БЕЗ УЧЕТА ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ И ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТА (83)
 - 3.3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧИ В ПОСТАНОВКЕ С УЧЕТОМ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ И БЕЗ ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТА (84)
 - 3.4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧИ В ПОСТАНОВКЕ С УЧЕТОМ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ И ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТА (84)
 4. ВЫВОДЫ (85)
- ЛИТЕРАТУРА (85)

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные задачи освоения Арктики ставят новые требования перед объектами шельфовой инфраструктуры. Искусственные ледовые острова представляют собой дешевую и экологически чистую альтернативу обычным буровым платформам для добычи нефти и газа в условиях Арктики. Подход уже успешно реализован в

Канаде [1]. Ледовые острова и их преимущества при освоении Арктики рассмотрены в работе [2]. В работе [3] было проведено численное решение задач устойчивости ледовых островов к упругому воздействию. Но при эксплуатации кроме механической устойчивости необходимо учитывать и устойчивость к термическим воздействиям (таяние ледового острова). Для корректного решения задачи устойчивости ледового острова к статическим и динамическим упругим воздействиям необходимо знать распределение температур внутри ледового острова. Так же важно изучить устойчивость острова к воздействию сезонных температурных колебаний. Подходы для учета климатических воздействий на ледовый остров были рассмотрены в работах [4-6].

В данной статье предложен подход к численному моделированию таяния ледовых островов, основанный на решении задачи об эволюции системы с разными фазовыми состояниями вещества и изменении расположения границы между этими фазами – задачи Стефана [7-12]. Численному решению задач с фазовыми переходами посвящены работы [13-16]. В [13,14] рассматривался метод прямых. Так же часто используются на практике метод конечных элементов и конечно-разностные

методы [15,16].

В данной работе используется энтальпийный подход [17]. Для этого задача сводится к функции теплосодержания. Разработанный подход также учитывает течение воды, стекание растаявшей воды и другие важные явления. С его помощью удалось получить распределения температуры в ледовом острове, а также провести исследование на устойчивость к сезонным температурным колебаниям.

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

2.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим трехмерную расчетную область произвольного объема V . Запишем первое начало термодинамики и перейдем от внутренней энергии к энтальпии:

$$\delta Q = dH - VdP, \tag{1}$$

где δQ – поток тепла, dH – изменение энтальпии, V – объем вещества, dP – изменение давления. Для достаточно медленных (практически равновесных) процессов с постоянным давлением (1) принимает вид:

$$\delta Q = dH. \tag{2}$$

Энтальпия – это функция состояния. Выделим в расчетной области малый элемент объёма. Для него первое начало термодинамики может быть переписано в виде:

$$-\int_{S=\partial V} \vec{q} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\partial H}{\partial t} dV, \tag{3}$$

где \vec{q} – тепловой поток на единицу площади. Используя теорему Гаусса, перейдем к уравнению непрерывности для теплоты:

$$\text{div}(\vec{q}) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Применив формулу теплопроводности Фурье, получаем из (4):

$$\vec{\nabla}(-k(H, x, y, z)\vec{\nabla}T) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

где $k(H, x, y, z)$ – коэффициент теплопроводности, который зависит от вещества и его фазового состояния.

Введем функцию теплосодержания:

$$Q = \begin{cases} \rho_s C_s T, & T < T_0, \\ \rho_L C_L (T - T_0) + \rho_s C_s T_0 + \rho_s \lambda, & T > T_0, \end{cases} \tag{6}$$

где ρ_s и C_s – плотность и удельная теплоемкость твердого, а ρ_L и C_L – жидкого состояния

вещества, T_0 – температура фазового перехода, λ – удельная теплота плавления данного объема.

Обратный переход к температуре возможен по формуле:

$$T = \begin{cases} \rho_s^{-1} C_s^{-1} Q, & Q < \rho_s C_s T_s = Q_-, \\ T_0, & Q_- < Q < Q_+, \\ \frac{Q + (\rho_L C_L - \rho_s C_s) T_0 - \rho_s \lambda}{\rho_L C_L}, & Q > \rho_s C_s T_s + \rho_s \lambda = Q_+, \end{cases} \tag{7}$$

где Q_- и Q_+ – пределы значения теплосодержания при температуре фазового перехода.

Считаем, что теплофизические константы определяются веществом, которое постоянно в данной точке. Заметим, что отображение (6) не является непрерывным относительно температуры. Это соотносится с тем фактом, что при температуре плавления вещество может находиться в разных фазовых состояниях.

Энтальпия и теплосодержание совпадают с точностью до константы. Подставим выражения (6) и (7) в (5) и получим уравнение гиперболического типа на эволюцию системы через теплосодержание:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(Q) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(Q) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(Q) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{8}$$

Отметим, что коэффициенты теплопроводности зависят также и от координаты точки, но в нашей модели в каждой точке вещество остается постоянным и меняется только его фазовое состояние, соответственно эта зависимость не отражена в данном уравнении.

Значение теплопроводности $k(Q)$ для каждой фазы вещества является известным. Для промежуточных значений, при фазовых переходах, для теплопроводности можем записать:

$$k(Q) = \begin{cases} k_s, & Q < Q_-, \\ k_s + (k_L - k_s) \cdot \frac{Q - Q_-}{Q_+ - Q_-}, & Q_- < Q < Q_+, \\ k_L, & Q > Q_+, \end{cases}$$

где k_s – теплопроводность твердого состояния вещества, k_L – жидкого.

2.2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для численного решения уравнения (8) была выбрана схема Писмена-Рекфорда (в двумерном случае именуемая как продольно-поперечная схема) [18,19], так как она показала наилучшие

результаты по скорости работы. В двумерном случае она является безусловно спектрально устойчивой, что позволяет свободно выбирать шаг по времени, но в то же время ее можно решить за линейное по числу узлов время. Расчет осуществляется в два шага: во время первого шага является явной по одному направлению, и неявной по второму; во время второго шага направления меняются:

$$\frac{2\Delta V}{\tau} \left(Q^{j+1} - Q^{j+\frac{1}{2}} \right) = \Lambda_x Q^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_y Q^{j+1},$$

$$\Lambda_x Q_{i_x, i_y} = k_{i_x+\frac{1}{2}} \frac{T(Q_{i_x+1, i_y}) - T(Q_{i_x, i_y})}{h_x} + k_{i_x-\frac{1}{2}} \frac{T(Q_{i_x-1, i_y}) - T(Q_{i_x, i_y})}{h_x}, \quad (9)$$

$$\Lambda_y Q_{i_x, i_y} = k_{i_y+\frac{1}{2}} \frac{T(Q_{i_x, i_y+1}) - T(Q_{i_x, i_y})}{h_y} + k_{i_y-\frac{1}{2}} \frac{T(Q_{i_x, i_y-1}) - T(Q_{i_x, i_y})}{h_y}.$$

Шаблон схемы представлен на **Рис. 1**.

При моделировании термических процессов в ледовом острове необходимо учитывать, что лед, тая в верхней части острова, может стекать вниз, таким образом изменяя вещество в узле сетки. Для этого на каждом шаге по времени все узлы расчетной сетки проверяются на выполнение условия таяния. В случае его удовлетворения происходит замена вещества в узле. Кроме того, модель учитывает течение в жидкости, вследствие чего, происходит перемешивание. Реализация всех этих эффектов подразумевает модификацию значений теплосодержания и вещества в узлах сетки после решения уравнений (8) при достижении определенных условий.

2.3. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Разработанная программа принимает на вход прямоугольную двумерную равномерную сетку, а также файлы конфигурации и начального распределения температур. В файле конфигурации реализована возможность указать все характеристики веществ, параметры задачи, такие как шаг по времени и суммарное число

шагов, а также периодичность записи полей температур, теплосодержания и агрегатного состояния в файл VTK для последующей визуализации.

Программа решает задачу в несколько этапов. В начале происходит проверка корректности входных данных и строится равномерная сетка по переданным данным. После этого вычисляется начальное поле теплосодержаний с помощью уравнения (6). Затем уравнения (9) решаются методом прогонки. При этом метод (11) допускает параллельное выполнение. Для этого каждый шаг разбивается на $i_x = 1, 2, \dots, N_x$ для первого полушага и $i_y = 1, 2, \dots, N_y$ для второго отдельных итераций, которые можно решить параллельно. Для распараллеливания используется OpenMP.

Решение систем находится с использованием метода прогонки (алгоритм Томаса). Для систем такого рода решение может быть получено за $O(n)$ операций. Данный алгоритм достаточно хорошо параллелится, используя блочную декомпозицию:

- Исходная матрица представляется в виде произведения блочной матрицы и некой модифицированной матрицы. При этом блочная матрица может быть раскидана между процессами по блокам.
- Вычисление блоков независимо различными процессами.
- Возврат к исходной матрице.

После каждого временного шага проверяются узлы сетки на выполнение условий фазового перехода. С определяемой пользователем периодичностью значения сеточной функции теплосодержания переводятся в температуру (7) и записываются в файл VTK.

Последующая визуализация файлов VTK возможна с использованием открытого программного обеспечения ParaView, а также собственных разработанных скриптов.

Для задания начальных условий реализованы скрипты для построения сеток из произвольных веществ различной формы (круг, прямоугольник и др.), а также начальных температур из файлов VTK предыдущих расчетов и произвольных фигур с постоянными температурами.

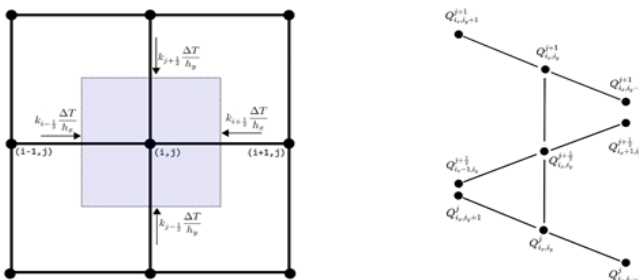


Рис. 1. Шаблон (справа) и иллюстрация работы метода на двумерной сетке (слева).

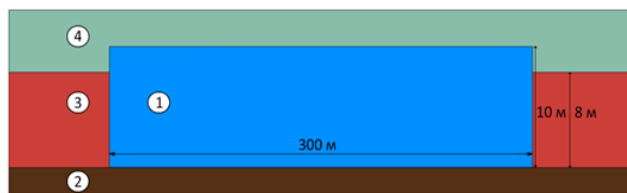


Рис. 2. Модель ледового острова.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Постановка задачи

Область интегрирования представляет собой ледовый остров высотой 10 м и горизонтальной протяженностью 300 м [3]. Остров погружен в воду на глубину 8 м и лежит на дне. Геометрические размеры области и схема расположения приведены на Рис. 2. Характеристики веществ представлены в Таблице 1. Также считаем, что температура плавления льда $T_0 = 0^\circ\text{C}$, а его удельная теплота плавления $\lambda = 334 \text{ кДж/кг}$.

На Рис. 2 введены обозначения веществ 1 – лед (искусственный ледовый остров), 2 – донный грунт, 3 – вода, в которую погружен ледовый остров, 4 – воздух.

Находилась распределение температур в ледовом острове при средних значениях температуры в зимний период. Так же производились расчеты с целью исследования устойчивости ледового острова к таянию при сезонных температурных изменениях.

Расчеты проводились с использованием трех основных моделей:

- постановка без учета течения воды и промерзания грунта;
- постановка с учетом течения воды, но без промерзания грунта;
- постановка с учетом течения воды и промерзания грунта.

3.2. Результаты моделирования задачи в постановке без учета течения воды и промерзания грунта

Было проведено моделирование для определения равновесного распределения

Таблица 1

Теплофизические свойства веществ.

№	Вещество	Плотность, кг/м³	Теплопроводность, Вт/(м·К)	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)
1	Лед	917	0.591	2100
2	Донный грунт	2500	0.8	750
3	Вода	1000	2.22	4180
4	Воздух	1.60	0.022	-

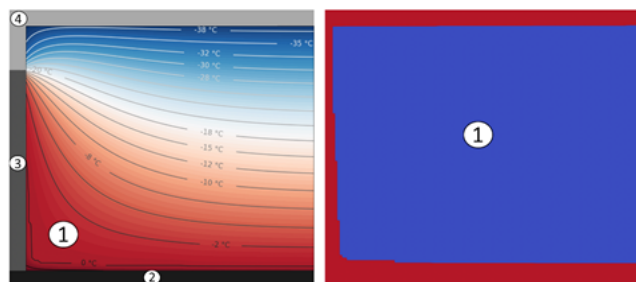


Рис. 3. Распределение температуры в ледовом острове (слева) и карта фазовых состояний (справа) в задаче установления температуры в ледовом острове в постановке без учета промерзания грунта.

температур в ледовом острове при температуре воздуха -40°C , температуре донного грунта 5°C и температуре воды 3°C . Решалась задача установления, начальная температура ледового острова составляла -10°C , контактирующие вещества (вода, воздух, грунт) задавались в виде граничных условий с заданными температурами, теплоемкостями и коэффициентами теплопроводности.

На Рис. 3 приведены результаты расчета установления температуры. Моделировался период 150 дней. Слева приведена картина распределения температур в ледовом острове, справа – карта фазовых состояний (синий – лед, красный – вода и воздух).

Далее проводилось исследование устойчивости ледового острова при сезонных изменениях температуры. Температура воздуха была изменена на 3°C . Результаты по прошествии 150 дней представлены на Рис. 4. Видно, что с краев ледовый остров практически не растаял – так как мы не учитываем течение воды, там просто установился градиент температур.

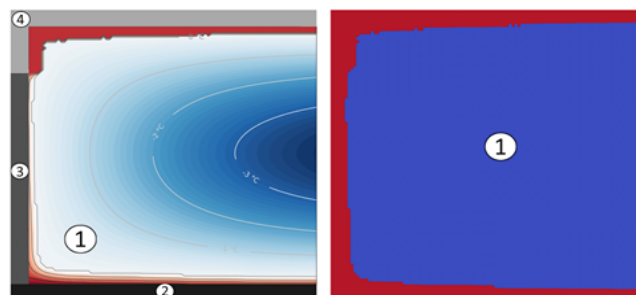


Рис. 4. Распределение температуры в ледовом острове (слева) и карта фазовых состояний (справа) в задаче таяния ледового острова под воздействием изменения температуры воздуха в постановке без учета течения воды и промерзания грунта.

Сверху же остров растаял значительно, так как после таяния вода сразу стекала вниз и уже на оставшийся массив льда ставилось граничное условие с воздухом. Даже сравнительно малый коэффициент теплопроводности воздуха обеспечил серьезный тепловой поток, который и растопил остров.

3.3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧИ В ПОСТАНОВКЕ С УЧЕТОМ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ И БЕЗ ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТА

Очевидно, что без учета течения воды ледовый остров практически не будет таять. Учтем течение воды следующим образом. Для любой растаявшей воды с температурой строго больше нуля в конце временного шага явно зададим температуру равную трем градусам Цельсия. В итоге удастся учесть течение воды. Используем распределение веществ, распределение температур после намораживания и теплофизические постоянные, полученные в задаче установления распределения температур в разделе 3.2. Аналогично предыдущему расчету, результаты через 150 дней таяния ледового острова представлены на **Рис. 5**. Четко видно, что остров практически растаял. Это произошло из-за того, что в донной его части при установлении возникла тонкая прослойка воды. Далее постоянная температура воды создавала большую разницу температур со льдом и как следствие аномально большой тепловой поток через нижнюю грань.

3.4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧИ В ПОСТАНОВКЕ С УЧЕТОМ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ И ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТА

Для того, чтобы решить проблему, которая возникла при учете течения воды в пункте 3.3

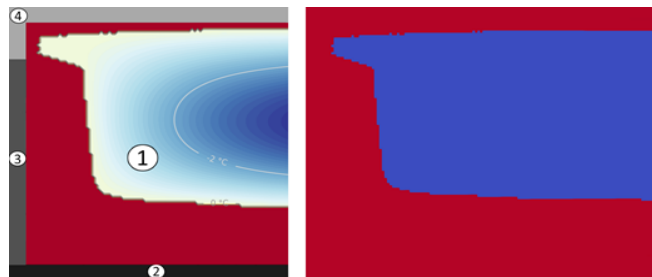


Рис. 5. Распределение температуры в ледовом острове (слева) и карта фазовых состояний (справа) в задаче таяния ледового острова под воздействием изменения температуры воздуха в постановке с учетом течения воды.

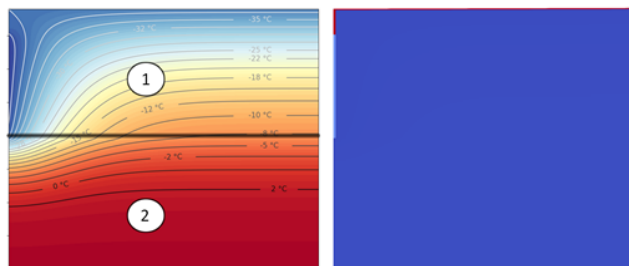


Рис. 6. Распределение температуры в ледовом острове (слева) и карта фазовых состояний (справа) в задаче установления температуры в ледовом острове в постановке с учетом промерзания грунта.

можно учесть промерзание грунта. Для этого используем расчетную область 300 метров на 20 метров, где лед занимает верхнюю половину, аналогично предыдущим постановкам, а внизу 10 метров заполнено грунтом (в предыдущих расчетах граница острова с грунтом задавалась граничным условием). Начальное распределение температур аналогично пункту 3.2, грунт имеет начальную температуру $+5^{\circ}\text{C}$. Граничные условия на воду и воздух аналогичны предыдущим постановкам с добавлением условия нулевого теплового потока через нижнюю и боковые грани массива грунта.

Результаты моделирования установления температур представлены на **Рис. 6**. Видно, что глубина промерзания грунта около пяти метров. Справа на Рис. 6 представлена карта фазовых состояний в расчетной области. Темно-синим обозначена твердая среда (лед и грунт), голубым – жидкая (вода) и красным – газообразная (воздух).

Далее для этого распределения температур была поставлена задача об устойчивости в экстремальных условиях с течением воды.

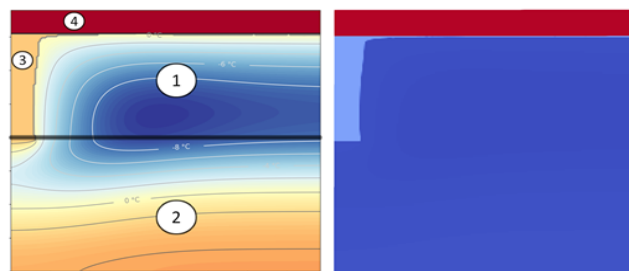


Рис. 7. Распределение температуры в ледовом острове (слева) и карта фазовых состояний (справа) в задаче таяния ледового острова под воздействием изменения температуры воздуха в постановке с учетом течения воды и промерзания грунта.

Температуру воздуха приняли равной $+10^{\circ}\text{C}$. Результаты моделирования представлены на **Рис. 7**. Видно, что через 150 дней надводная часть растаяла полностью. Ребро острова тоже серьезно растаяло, размер оттаявшей части сопоставим с размером надводной части острова. Температура в глубине острова и в толще грунта практически не изменилась.

4. ВЫВОДЫ

В работе развит энтальпийный подход для решения задачи Стефана, а также разработано программное обеспечение для решения этой задачи в различных постановках. На основе этой программы протестированы разные модели ледового острова и сделаны выводы о его устойчивости к таянию. Разработанный подход позволяет учитывать разные внешние воздействия, такие как потоки тепла от техногенных установок, течение воды и сезонные изменения температуры. На основе полученных данных возможно более эффективное планирование разработки структуры будущих ледовых островов, а также открывается возможность для численного моделирования существующих с целью аудита их целостности. Также с использованием данного подхода возможна проверка целесообразности использования таких материалов как пайкерит и других ледокомпозитных материалов, внедрения дополнительных теплоизолирующих слоев, охлаждения ребер острова и других идей.

Разработанные методы могут быть применены при решении статической и динамической термоупругих задач, которые являются логическим продолжением настоящего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crawford A, Crocker G, Mueller D, et al. The canadian ice island drift, deterioration and detection (CI2D3) database. *Journal of Glaciology*, 2018, 64(245):517-521.
2. Горгуца ЕЮ, Курило ЕЮ. Строительство искусственных ледовых островов в условиях Арктики. *Гидротехника. XXI век*, 2017, 4(32):54-57.
3. Петров ИБ, Муратов МВ, Сергеев ФИ. Исследование устойчивости искусственных ледовых островов методами математического моделирования. *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*, 2020, 495:33-36.
4. Бuzин ВА, Зиновьев АТ. Ледовые процессы и явления на реках и водохранилищах. Методы математического моделирования и опыт их реализации для практических целей (обзор современного состояния проблемы). 2009, http://www.iwep.ru/ru/bibl/books/monograf/Zinovev_Buzin.pdf.
5. Comfort G, Abdelnour R. Ice Thickness Prediction: A Comparison of Various Practical Approaches. *CGU HS Committee on River Ice Processes and the Environment, 17th Workshop on River Ice*, Edmonton, Alberta, 2013.
6. Anneck NN. Method for Prediction of Sea Ice Thickness Based on the Blowing Air Temperature and Speed. *Master Thesis at University of Liege*, 2015.
7. Албу АФ. Применение методологии быстрого автоматического дифференцирования к решению задач управления тепловыми процессами с фазовыми переходами. *Дис. д-ра физ.-мат. наук*. М., 2016.
8. Бирюков ВА, Миряха ВА, Петров ИБ. Численное моделирование трехмерной задачи таяния искусственного ледяного острова энтальпийным методом. *Четвертая всероссийская конференция с международным участием «Полярная Механика-2017»*, 2017, 81-86.
9. Jonsson T. On the one-dimensional Stefan problem with some numerical analysis Bachelor of Mathematics. *180hp Department of Mathematics and Mathematical Statistics*, 2013.
10. White RE. An enthalpy formulation of the Stephan problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1982, 19(6):1129-1157.
11. White RE. A numerical solution of the enthalpy formulation of the Stephan problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1982, 19(6):1158-1172.
12. Самарский АА. *Введение в численные методы*. М., Наука, 1987.
13. Васильев ФП. О методе прямых для решения однофазной задачи типа Стефана. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1968, 8(1):64-78.
14. Бачелис РД, Мамелад ВГ, Шляйфер ДБ. Решение задачи типа Стефана методом прямых. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1969, 9(3):585-594.

15. Будак БМ, Соловьева ЕН, Успенский АБ. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1965, 5(5):828-840.
16. Дарьин НА, Мажукин ВИ. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке. *Дифференциальные уравнения*, 1987, 23(7):1154-1160.
17. Бучко НА. Энтальпийный метод численного решения задач теплопроводности в промерзающих или протаивающих грунтах. *СПбГУНТ и ПТ*. http://refportal.com/upload/files/enthalpiiny_metod_chislennogo_resheniya.pdf.
18. Албу АФ, Зубов ВИ. Математическое моделирование и исследование процесса кристаллизации металла в литейном деле. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007, 47(5):882–902.
19. Албу АВ, Зубов ВИ. О выборе функционала и разностной схемы при решении задачи оптимального управления процессом кристаллизации металла. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2011, 51(1):24-38.

Муратов Максим Викторович*к.ф.-м.н.*

МФТИ, кафедра вычислительной физики
9, Институтский пер., г. Долгопрудный
141701, Московская область, Россия
max.muratov@gmail.com

Бирюков Владимир Александрович*младший научный сотрудник*

МФТИ, кафедра вычислительной физики
9, Институтский пер., г. Долгопрудный
141701, Московская область, Россия
biryukov.vova@gmail.com

Конов Денис Сергеевич*техник*

МФТИ, кафедра вычислительной физики
9, Институтский пер., г. Долгопрудный
141701, Московская область, Россия
konov1999@gmail.com

Петров Игорь Борисович*д.ф.-м.н., проф., чл.-корр. РАН, акад. РАЕН*

МФТИ, кафедра вычислительной физики
9, Институтский пер., г. Долгопрудный
141701, Московская область, Россия
retrov@mipt.ru