DOI: 10.17725/rensit.2021.13.487

Характеристическая форма уравнений динамики среды Коссера

Булычев Г.Г.

МИРЭА-Российский технологический университет, https://www.mirea.ru/

Москва 119454, Россия

E-mail: geo-bulychev@mail.ru

Поступила 26.08.2021, рецензирована 10.09.2021, принята 15.09.2021

Представлена действительным членом РАЕН В.А. Бушуевым

Аннотация: **В статье проводится построение характеристической формы уравнений динамики среды Коссера и псевдоконтинуума Коссера для ограниченных тел. Для построения используется метод матричных преобразований, предлагаемый автором и позволяющий с помощью тождественных преобразований получать необходимые соотношения. Полученные уравнения сравниваются с уравнениями для симметрично упругого изотропного однородного тела. Предлагается методика выбора необходимых уравнений для вычислительных схем во внутренней и граничной точках тела. Предлагается последовательность операций для итеративных вычислений напряжений, скоростей частиц, моментных напряжений и угловых скоростей частиц в связанной модели среды Коссера.**

Ключевые слова: **динамические процессы, метод пространственных характеристик, численное моделирование, среда Коссера**

УДК 537.311.3, 539.23, 546.26

Для цитирования: Булычев Г.Г. Характеристическая форма уравнений динамики среды Коссера. *РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*, 2021, 13(4):487-494. DOI: 10.17725/rensit.2021.13.487.

Characteristic form of dynamics equations of Cosserat medium

George G. Bulychev

MIREA-Russian Technological University, https://www.mirea.ru/

Moscow 119454, Russian Federation

E-mail: geo-bulychev@mail.ru

Received August 26, 2021, peer-reviewed September 10, 2021, accepted September 15, 2021

Abstract: **In this paper, we construct the characteristic form of the equations of dynamics of the Cosserat medium and the Cosserat pseudocontinuum for bounded bodies. The method of matrix transformations proposed by the author is used for construction and allows obtaining the necessary relations using identical transformations. The obtained equations are compared with those for a symmetrically elastic isotropic homogeneous body. A method is proposed for selecting the necessary equations for computational schemes at the internal and boundary points of the body. A sequence of operations is proposed for iterative calculations of stresses, particle velocities, moment stresses, and angular velocities of particles in a coupled model of the Cosserat medium.**

Keywords: **dynamic processes, spatial characteristics method, numerical modeling, Cosserat medium**

UDC 537.311.3, 539.23, 546.26

For citation: George G. Bulychev. Characteristic form of dynamics equations of Cosserat medium. *RENSIT: Radioelectronics. Nanosystems. Information technologies*, 2021, 13(4)487-494. DOI: 10.17725/rensit.2021.13.487.

Содержание

1. **Введение (488)**
2. **Построение характеристических уравнений динамики среды Коссера (488)**
3. **Моделирование (493)**
4. **Заключение (494)**

Литература (494)

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из первых моделей моментной упругости была модель братьев Коссера [1], развитая ими в 1909 году (см. также [2]). Довольно длительное время эта модель была не востребована и только в шестидесятые годы прошлого столетия ей были найдены применения, и появилось значительное количество работ, так или иначе развивающих эту модель [3,4,5]. В частности, в [5] большое внимание уделялось кинетике среды Коссера и, с использованием производящих функций, были построены фундаментальные решения задач эластокинетики и термоэластокинетики для этой среды. Там же были выведены формулы для дисперсии фазовой скорости поперечных волн кручения и показана возможность бифуркации этих волн при различных частотах вращения частиц среды.

В настоящее время модель Коссера широко используется там, где классические теории не дают хорошего согласия с экспериментом. Так, исследуя вопросы теории хрупкого разрушения металлов, Морозов [6] привлекает моментную теорию для описания напряжений вблизи кончика трещины, Жилин [7] использует модель Коссера в теории неклассических оболочек, Ерофеев и Кунин [8,9] на основе нелинейной теории Коссера исследуют солитоны в твердых телах и разрабатывают полярную теорию сред с микроструктурой. Существует ещё ряд работ, где моментные теории используются для исследования движения зёрен в ферромагнетиках, термодиффузии, усложненных моделей кристаллических решёток и т.д.

В данной работе на основе матричного метода, разработанного автором, строится матричная и скалярная характеристическая форма уравнений динамики линейной среды Коссера и псевдоконтинуума Коссера и обсуждаются возможности и последовательность их численной реализации.

2. ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СРЕДЫ КОССЕРА

Следуя [5], уравнения динамики для среды Коссера можно записать в виде системы, состоящей из уравнений движения,

$$\begin{aligned} &\partial_j p_{ji} + f_i = \rho \partial_t^2 u_i, \\ &\in_{ijk} p_{jk} + \partial_j \mu_{ji} + y_i = J \partial_t^2 \Omega_i, \end{aligned} \tag{1}$$

уравнений для несимметричных деформаций и тензора изгиба-кручения

$$\begin{aligned} &\gamma_{ji} = \partial_j u_i - \in_{kji} \Omega_k, \\ &\chi_{ji} = \partial_j \Omega_i, \end{aligned} \tag{2}$$

и определяющих уравнений

$$\begin{aligned} &p_{ji} = (\mu + a)\gamma_{ji} + (\mu - a)\gamma_{ij} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{ji}, \\ &\mu_{ji} = (\varphi + \varepsilon)\chi_{ji} + (\varphi - \varepsilon)\chi_{ij} + \beta \chi_{kk} \delta_{ji}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь μ, λ – постоянные Ламе, $a,\varphi,\varepsilon,\beta$ – новые упругие постоянные, p_{ji} – несимметричные напряжения, γ_{ji} – несимметричные деформации, χ_{ji} – тензор изгиба-кручения, u_i – перемещения, Ω_i – углы поворота, f_i – внутренние силы, y_i – внутренние моменты, $\in_{ijk}$ – тензор Леви-Чевита, δ_{ij} – единичный тензор, $i,j,k = 1,2,3$; $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $\partial_t^2 = \partial^2/\partial t^2$, t – время, x_j – декартовы координаты, по повторяющимся римским индексам здесь и далее проводится суммирование.

Зметим, что системы (2) и (3) построены таким образом, что

$$\begin{aligned} &p_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\alpha},\ p_{\alpha\beta} + p_{\beta\alpha} = 2\sigma_{\alpha\beta}, \\ &\gamma_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{\alpha\alpha},\ \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\alpha} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\alpha}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – напряжения классической теории упругости, по повторяющимся греческим индексам α, β, γ, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, здесь и далее суммирования нет. Индексы $\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3$ и образуют круговую перестановку чисел 1,2,3, то есть $\in_{\alpha\beta\gamma} = 1$, а $\in_{\beta\alpha\gamma} = -1$.

Замечание (4) позволяет сводить некоторые градиентные задачи динамики среды Коссера (например, задачу связанной термоупругости) к задачам классической безмоментной механики, если, конечно, не рассматривать несимметричные касательные деформации и напряжения по отдельности. Другим следствием (4) является то, что нормальные напряжения и деформации среды Коссера равны соответствующим напряжениям и деформациям классической теории упругости и взаимодействие обычных и моментных напряжений происходит только через касательные напряжения.

Перейдём к построению матричной формы уравнений (1)-(3), для чего введём матрицы строки

$$\begin{aligned} &P = \|p_{11} \quad p_{22} \quad p_{33} \quad p_{12} \quad p_{13} \quad p_{21} \quad p_{23} \quad p_{31} \quad p_{32}\|, \\ &\Gamma = \|\gamma_{11} \quad \gamma_{22} \quad \gamma_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{21} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31} \quad \gamma_{32}\|, \\ &M = \|\mu_{11} \quad \mu_{22} \quad \mu_{33} \quad \mu_{12} \quad \mu_{13} \quad \mu_{21} \quad \mu_{23} \quad \mu_{31} \quad \mu_{32}\|, \\ &X = \|\chi_{11} \quad \chi_{22} \quad \chi_{33} \quad \chi_{12} \quad \chi_{13} \quad \chi_{21} \quad \chi_{23} \quad \chi_{31} \quad \chi_{32}\|, \\ &U = \|u_1 \quad u_2 \quad u_3\|,\ \Omega = \|\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3\|, \\ &F = \|f_1 \quad f_2 \quad f_3\|, Y = \|y_1 \quad y_2 \quad y_3\| \end{aligned} \tag{5}$$

и две дополнительные матрицы-строки

$e_i = \|\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3\|$ и

$q_{ij} = \|\delta_{1i}\delta_{1j} \quad \delta_{2i}\delta_{2j} \quad \delta_{3i}\delta_{3j} \quad \delta_{1i}\delta_{2j} \quad \delta_{1i}\delta_{3j} \quad \delta_{2i}\delta_{1j} \quad \delta_{2i}\delta_{3j} \quad \delta_{3i}\delta_{1j} \quad \delta_{3i}\delta_{2j}\|$,

с помощью которых можно выделять компоненты из матриц-строк (5) и восстанавливать эти матрицы-строки по их компонентам, например,

$$e_\alpha U^T = u_\alpha, \; e_i^T u_i = U^T, \; q_{\alpha\beta} P^T = p_{\alpha\beta}, \; q_{ij}^T p_{ij} = P^T, \quad (6)$$

очевидно $e_\alpha e_\beta^T = \delta_{\alpha\beta}$, $e_i^T e_i = I_3$, $q_{\alpha\beta} q_{cd}^T = \delta_{\alpha c}\delta_{\beta d}$, $q_{ij}^T q_{ij} = I_9$, где I_3 и I_9 единичные матрицы 3-го и 9-го порядка.

С помощью матриц (5) и вспомогательных матриц e_i и q_{ij} построим матричную форму уравнений (1)-(3), воспользовавшись видом матриц-строк (5), дополнительных матриц и свойствами (6) дополнительных матриц.

При этом уравнения (1) примут вид:

$$\begin{gathered} Q_i \partial_i P^T + F^T = \rho \partial_t V^T, \\ -S_i Q_i P^T + Q_i \partial_i M^T + Y^T = J \partial_t \omega^T, \end{gathered} \quad (7)$$

где $V^T = \partial_t U^T$, $\omega^T = \partial_t \Omega^T$, матрицы $Q_i = e_j^T q_{ij}$ и $S_i = -\in_{ijk} e_j^T e_i$ известные нам по [10] и характеризующие матричную форму дифференциальных инвариантов *grad, div* и *rot*. В матричном виде Q_i и S_i имеют вид

$$Q_i = \begin{Vmatrix} \delta_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{2i} & 0 & \delta_{3i} & 0 \\ 0 & \delta_{2i} & 0 & \delta_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{3i} \\ 0 & 0 & \delta_{3i} & 0 & \delta_{1i} & 0 & \delta_{2i} & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$S_i = \begin{Vmatrix} 0 & -\delta_{3i} & \delta_{2i} \\ \delta_{3i} & 0 & -\delta_{1i} \\ -\delta_{2i} & \delta_{1i} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Уравнения (2), продифференцированные по t, в матричном представлении запишутся в виде

$$\begin{gathered} \partial_t \Gamma^T = Q_i^T (\partial_i V^T + S_i \omega^T), \\ \partial_t X^T = Q_i^T \partial_i \omega^T. \end{gathered} \quad (8)$$

Уравнения (3), также продифференцированные по t, в матричном представлении примут вид

$$\begin{gathered} \partial_t P^T = \{(\mu + a) I_9 + (\mu - a) q_{ij}^T q_{ji} + \lambda q_{ij}^T q_{kk} \delta_{ij}\} \partial_t \Gamma^T, \\ \partial_t M^T = \{(\varphi + \varepsilon) I_9 + (\varphi - \varepsilon) q_{ij}^T q_{ji} + \beta q_{ij}^T q_{kk} \delta_{ij}\} \partial_t X^T, \end{gathered} \quad (9)$$

или используя (8), окончательно

$$\begin{gathered} \partial_t P^T = \{(\mu + a) I_9 + (\mu - a) q_{ij}^T q_{ji} + \lambda q_{ij}^T q_{kk} \delta_{ij}\} \times \\ \times Q_i^T (\partial_i V^T + S_i \omega^T), \\ \partial_t M^T = \{(\varphi + \varepsilon) I_9 + (\varphi - \varepsilon) q_{ij}^T q_{ji} + \beta q_{ij}^T q_{kk} \delta_{ij}\} Q_i^T \partial_i \omega^T. \end{gathered} \quad (10)$$

Уравнения (7) и (10), записанные в матричном представлении, определяют 24 переменных, заданных матрицами-строками *P, V, M* и ω.

Рассмотрим произвольный элемент $q_{\alpha\beta}^T q_{\chi\phi} a$, стоящий в фигурных скобках. В силу выбора вида матриц-строк q_{ij}, $q_{\alpha\beta}^T$ показывает номер строки, на которой расположен элемент a, а $q_{\chi\phi}$ – порядковый номер этого элемента в строке. Заметив это, запишем матрицы жесткостей C_p и вращений C_m:

$$C_p = \begin{Vmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+a & 0 & \mu-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu+a & 0 & 0 & \mu-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-a & 0 & \mu+a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu+a & 0 & \mu-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-a & 0 & 0 & \mu+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-a & 0 & \mu+a \end{Vmatrix},$$

$$C_m = \begin{Vmatrix} 2\varphi+\beta & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 2\varphi+\beta & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & 2\varphi+\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi+\varepsilon & 0 & \varphi-\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi+\varepsilon & 0 & 0 & \varphi-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi-\varepsilon & 0 & \varphi+\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi+\varepsilon & 0 & \varphi-\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi-\varepsilon & 0 & 0 & \varphi+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi-\varepsilon & 0 & \varphi+\varepsilon \end{Vmatrix}.$$

С помощью построенных матриц C_p и C_m и уравнений (8) уравнения (10) запишутся в виде, который и будет использоваться в дальнейшем, т.е. в виде

$$\begin{gathered} \partial_t P^T = C_p Q_i^T (\partial_i V^T + S_i \omega^T), \\ \partial_t M^T = C_m Q_i^T \partial_i \omega^T. \end{gathered} \quad (11)$$

Построим матричную форму характеристических уравнений для волн напряжений, распространяющихся в обе стороны вдоль оси x_α декартовой системы координат $\{x_i\}$. Для этого умножим первое уравнение (11) слева на матрицу Q_α, выделяющую из матрицы P напряжения, действующие на площадке с нормалью к оси x_α, т.е. $Q_\alpha P^T = \|p_{\alpha 1} \quad p_{\alpha 2} \quad p_{\alpha 3}\|^T$, и проведём необходимую группировку членов этого уравнения:

$$\begin{gathered} \partial_t P_\alpha^T - C_{\alpha\alpha} \partial_t V^T = C_{\alpha k} (\partial_k V^T + S_k \omega^T) + \\ + C_{\alpha\alpha} S_\alpha \omega^T, \; k = \beta, \gamma, \end{gathered} \quad (12)$$

где $C_{\alpha\beta} = Q_\alpha C_p Q_\beta^T$, по повторяющимся индексам k проводится суммирование.

Заметим, что все матрицы $C_{\alpha\alpha} = diag(...)$, α = 1,2,3 и имеют собственные значения 2μ + λ и μ + α. Обозначим через $|D_{\alpha p}| = \sqrt{C_{\alpha\alpha} / \rho}$ модуль матрицы скоростей волн напряжений среды Коссера вдоль оси x_α.

Также перегруппируем первое из уравнений движения (7)

$$\partial_\alpha P_\alpha^T - \rho \partial_t V^T = -\partial_k P_k^T - F^T, \; P_k = Q_k P^T. \quad (13)$$

Далее умножим (13) слева на $|D_{\alpha p}|$ и сложим

(12) и (13). Проведем группировку, выделяя матричный характеристический оператор и считая, что волны распространяются в обе стороны вдоль оси x_α, получаем матричные характеристические уравнения.

$$(I_3\partial_t \pm D_{\alpha p}\partial_\alpha)(P_\alpha^T \mp \rho D_{\alpha p}V^T) = \\ = C_{\alpha k}(\partial_k V^T + S_k\omega^T) + C_{\alpha\alpha}S_\alpha\omega^T \mp \\ \mp D_{\alpha p}(\partial_k P_k^T + F^T),\ \ k = \beta,\gamma. \tag{14}$$

Характеристические уравнения (14) легко распадаются на 6 скалярных уравнений, выбранная форма записи показывает, что, в силу антисимметричности матрицы S_i, скалярные уравнения для нормальных напряжений не содержат ω_i, что является контролем правильности вычислений.

Прежде чем перейти к скалярным уравнениям заметим, что вычисление матриц $C_{\alpha\beta}$ достаточно просто: вначале из матрицы C_p выделяются три строки, соответствующие положению единиц в матрице Q_α. Потом из полученной таким образом прямоугольной матрицы $Q_\alpha C_p$ выделяются столбцы, соответствующие единицам в матрице Q_β, в результате получается матрица $C_{\alpha\beta}$. В силу симметрии матрицы C_p легко показать также, что $C_{\beta\alpha} = C_{\alpha\beta}^T$, последнее значительно упрощает дальнейшие выкладки. Скалярные уравнения, соответствующие (14) имеют вид.

$$(\partial_t \pm c_1\partial_\alpha)(p_{\alpha\alpha} \mp \rho c_1 V_\alpha) = \\ = \lambda(\partial_\beta V_\beta + \partial_\gamma V_\gamma) \mp c_1(\partial_\beta p_{\beta\alpha} + \partial_\gamma p_{\gamma\alpha} + f_\alpha), \tag{15}$$

$$(\partial_t \pm c_2\partial_\alpha)(p_{\alpha\beta} \mp \rho c_2 V_\beta) = (\mu + a)\partial_\beta V_\alpha - \\ -2a\omega_\gamma \mp c_2(\partial_\beta p_{\beta\beta} + \partial_\gamma p_{\gamma\beta} + f_\beta), \tag{16}$$

$$(\partial_t \pm c_2\partial_\alpha)(p_{\alpha\gamma} \mp \rho c_2 V_\lambda) = (\mu + a)\partial_\gamma V_\alpha + \\ +2a\omega_\beta \mp c_2(\partial_\beta p_{\beta\gamma} + \partial_\gamma p_{\gamma\gamma} + f_\gamma), \tag{17}$$

где $c_1 \equiv c_{\|} = \sqrt{(2\mu+\lambda)/\rho}$ – скорость продольных волн напряжений, совпадающая с аналогичной скоростью в изотропном теле, $c_2 = \sqrt{(\mu+a)/\rho}$ – скорость поперечных волн напряжений в модели Коссера, V_i компоненты матрицы скоростей частиц V.

Для построения характеристик на неподвижных разрывах воспользуемся уравнениями (11) и (12). Из уравнения (12) выделим $\partial_\alpha V^T + S_\alpha\omega^T$, , при этом получим

$$\partial_\alpha V^T + S_\alpha\omega^T = C_{\alpha\alpha}^{-1}\left[\partial_t P_\alpha^T - C_{\alpha k}(\partial_k V^T + S_k\omega^T)\right]. \tag{18}$$

Для того, чтобы получить уравнения для P_β^T и P_γ^T, умножим первое уравнение (11) последовательно на Q_β и Q_γ; при этом получим

$$\partial_t P_\beta^T = C_{\beta k}(\partial_k V^T + S_k\omega^T) + C_{\beta\alpha}(\partial_\alpha V^T + S_\alpha\omega^T), \\ \partial_t P_\gamma^T = C_{\gamma k}(\partial_k V^T + S_k\omega^T) + C_{\gamma\alpha}(\partial_\alpha V^T + S_\alpha\omega^T), \tag{19}$$

и, подставляя (18) в (19) и проводя группировки, получаем окончательно матричную характеристическую форму уравнений на неподвижных разрывах

$$\partial_t(P_\beta^T - C_{\beta\alpha}C_{\alpha\alpha}^{-1}P_\alpha^T) = (C_{\beta k} - C_{\beta\alpha}C_{\alpha\alpha}^{-1}C_{\alpha k})(\partial_k V^T + S_k\omega^T), \\ \partial_t(P_\gamma^T - C_{\gamma\alpha}C_{\alpha\alpha}^{-1}P_\alpha^T) = (C_{\gamma k} - C_{\gamma\alpha}C_{\alpha\alpha}^{-1}C_{\alpha k})(\partial_k V^T + S_k\omega^T). \tag{20}$$

Скалярная форма уравнений (20) представляет собой шесть уравнений

$$\partial_t(p_{\beta\alpha} - \eta p_{\alpha\beta}) = 4a(\mu+a)^{-1}(\mu\partial_\beta V_\alpha + a\omega_\gamma), \\ \partial_t(p_{\beta\beta} - \nu_1 p_{\alpha\alpha}) = 2\mu[(1+\nu_1)\partial_\beta V_\beta + \nu_1\partial_\gamma V_\gamma], \\ \partial_t p_{\beta\gamma} = \mu(\partial_\beta V_\gamma + \partial_\gamma V_\beta) + a(\partial_\beta V_\gamma - \partial_\gamma V_\beta - 2\omega_\alpha). \\ \partial_t(p_{\gamma\alpha} - \eta p_{\alpha\gamma}) = 4a(\mu+a)^{-1}(\mu\partial_\gamma V_\alpha + a\omega_\beta), \\ \partial_t p_{\gamma\beta} = \mu(\partial_\gamma V_\beta + \partial_\beta V_\gamma) + a(\partial_\gamma V_\beta - \partial_\beta V_\gamma + 2\omega_\alpha), \\ \partial_t(p_{\gamma\gamma} - \nu_1 p_{\alpha\alpha}) = 2\mu[\nu_1\partial_\beta V_\beta + (1+\nu_1)\partial_\gamma V_\gamma]. \tag{21}$$

где $\eta = (\mu - a)/(\mu + a),\ \nu_1 = \lambda/(2\mu+\lambda).$

Для контроля вычислений заметим, что все уравнения для нормальных компонент напряжений не зависят от ω_i, а также сложим третье уравнение (21) с пятым уравнением, при этом получим известное из классической линейной упругости уравнение.

$$\partial_t(p_{\beta\gamma} + p_{\gamma\beta}) = 2\mu(\partial_\gamma V_\beta + \partial_\beta V_\gamma). \tag{22}$$

Уравнения (15)-(17) и (21) образуют систему 12 скалярных характеристических уравнений, для 12 компонент матриц-строк P и V, и, при известном векторе ω, могут быть использованы для их определения.

Придавая α, последовательно, значения 1,2,3 получаем 36 скалярных уравнений, из которых, при численном моделировании, необходимо выбрать 12.

Как теоретически доказано в [11], для двумерных задач динамики изотропного тела и практически проверено для трёхмерных задач автором, чтобы обеспечить устойчивость счёта во внутренней точке среды, необходимо выбрать уравнения на движущихся разрывах для нормальных напряжений $p_{\alpha\alpha}$ и скоростей частиц V_α. Остальные уравнения выбираются из контекста задачи, обычно это уравнения на неподвижных разрывах. В граничной точке среды, согласно [12], используются граничные условия, уравнения на разрывах, движущихся изнутри тела нормально к рассматриваемой границе, и уравнения на неподвижных разрывах.

Рассматривая уравнения (15)-(17) и (21), можно заметить, что:

1. Во всех уравнениях ω_i входит в комбинациях $\alpha\omega_i$, и при малых α или малых ω_i ею можно пренебречь и, таким образом, разорвать связь между уравнениями для обычных и моментных напряжений. Однако, если в первом случае приходят к классическим уравнениям динамики изотропного тела, то во втором случае уравнения соответствуют несимметрично-упругому телу.
2. Уравнения вида (22) могут быть использованы для уменьшения количества уравнений, связывающих обычные и моментные напряжения, в результате этого число уравнений, в которые входит ω_i, может быть понижено до трёх.
3. Все уравнения для нормальных напряжений $p_{\alpha\alpha}$ не зависят от ω_i и совпадают с уравнениями классической упругости.
4. Из условий положительности матрицы C_p величина α должна находиться в пределах от 0 до μ. Следовательно, скорость поперечных волн в модели Коссера всегда ниже скорости продольных волн в изотропном теле. То есть всегда вначале распространяется продольная волна, а потом поперечные волны. Такое соотношение скоростей является необходимым и достаточным для устойчивости численных схем.

Построим теперь матричную характеристическую форму моментных напряжений. Исходными уравнениями являются вторые уравнения систем (7) и (11), т.е. система уравнений

$$\begin{gathered} -S_iQ_iP^T + Q_i\partial_i M^T + Y^T = J\partial_t\omega^T, \\ \partial_t M^T = C_m Q_i^T \partial_i \omega^T. \end{gathered} \tag{23}$$

Заметим, что меняя $-S_iQ_iP^T + Y^T$ на F^T, M^T на P^T, J на ρ и ω^T на V^T, приходим к первому уравнению (7), а заменяя C_m на C_p и добавляя $S_i\omega^T$, приходим к первому уравнению (11). Поэтому, следуя дальше, по аналогии введём $M_\alpha^T = Q_\alpha M^T$, $C_{\alpha\beta m} = Q_\alpha C_m Q_\beta^T$, $D_{\alpha m} = \sqrt{C_{\alpha\alpha m}/J}$, $\alpha,\beta = 1,2,3$. Заметим, что все $C_{\alpha\alpha m}$ и $D_{\alpha m}$ – диагональны.

Тогда матричное уравнение для моментных напряжений, движущихся вдоль оси x_α по аналогии с (14) примет вид

$$\begin{gathered} (I_3\partial_t \pm D_{\alpha m}\partial_\alpha)(M_\alpha^T \mp JD_{\alpha m}\omega^T) = \\ = C_{\alpha km}\partial_k\omega^T \mp D_{\alpha m}(\partial_k M_k^T - S_iQ_iP^T + Y^T). \end{gathered} \tag{24}$$

где $i = \alpha,\beta,\gamma$, $k = \beta,\gamma$.

Уравнения на неподвижных разрывах, аналогичные (19), примут вид

$$\begin{gathered} \partial_t(M_\beta^T - C_{\beta\alpha m}C_{\alpha\alpha m}^{-1}M_\alpha^T) = \\ = (C_{\beta km} - C_{\beta\alpha m}C_{\alpha\alpha m}^{-1}C_{\alpha km})\partial_k\omega^T, \\ \partial_t(M_\gamma^T - C_{\gamma\alpha m}C_{\alpha\alpha m}^{-1}M_1^T) = \\ = (C_{\gamma km} - C_{\gamma\alpha m}C_{\alpha\alpha m}^{-1}C_{\alpha km})\partial_k\omega^T. \end{gathered} \tag{25}$$

В скалярном виде уравнения (24), (25) представляют собой 9 уравнений

$$\begin{gathered} (\partial_t \pm c_3\partial_\alpha)(\mu_{\alpha\alpha} \mp Jc_3\omega_\alpha) = \beta(\partial_\beta\omega_\beta + \partial_\gamma\omega_\gamma) \mp \\ \mp c_3(\partial_\beta\mu_{\beta\alpha} + \partial_\gamma\mu_{\gamma\alpha} + p_{\gamma\beta} - p_{\beta\gamma} + y_\alpha), c_3 = \sqrt{(2\varphi+\beta)/J}, \\ (\partial_t \pm c_4\partial_\alpha)(\mu_{\alpha\beta} \mp Jc_4\omega_\beta) = (\varphi-\varepsilon)\partial_\beta\omega_\alpha \mp \\ \mp c_4(\partial_\beta\mu_{\beta\beta} + \partial_\gamma\mu_{\gamma\beta} + p_{\alpha\gamma} - p_{\gamma\alpha} + y_\beta), c_4 = \sqrt{(\varphi+\varepsilon)/J}, \\ (\partial_t \pm c_4\partial_\alpha)(\mu_{\alpha\gamma} \mp Jc_4\omega_\gamma) = (\varphi-\varepsilon)\partial_\gamma\omega_\alpha \mp \\ \mp c_4(\partial_\beta\mu_{\beta\gamma} + \partial_\gamma\mu_{\gamma\gamma} + p_{\beta\alpha} - p_{\alpha\beta} + y_\gamma), \\ \partial_t(\mu_{\beta\alpha} - \eta_m\mu_{12}) = 4\varepsilon\varphi(\varphi+\varepsilon)^{-1}\partial_\beta\omega_\alpha, \\ \partial_t(\mu_{\beta\beta} - \nu_{1m}\mu_{\alpha\alpha}) = 2\varphi[(1+\nu_{1m})\partial_\beta\omega_\beta + \nu_{1m}\partial_\gamma\omega_\gamma], \\ \partial_t\mu_{\beta\gamma} = \varphi(\partial_\beta\omega_\gamma + \partial_\gamma\omega_\beta) + \varepsilon(\partial_\beta\omega_\gamma - \partial_\gamma\omega_\beta), \\ \partial_t(\mu_{\gamma\alpha} - \eta_m\mu_{\alpha\gamma}) = 4\varepsilon\varphi(\varphi+\varepsilon)^{-1}\partial_\gamma\omega_\alpha, \\ \partial_t\mu_{\gamma\beta} = \varphi(\partial_\gamma\omega_\beta + \partial_\beta\omega_\gamma) + \varepsilon(\partial_\gamma\omega_\beta - \partial_\beta\omega_\gamma), \\ \partial_t(\mu_{\gamma\gamma} - \nu_{1m}\mu_{\alpha\alpha}) = 2\varphi[\nu_{1m}\partial_\beta\omega_\beta + (1+\nu_{1m})\partial_\beta\omega_\beta], \end{gathered} \tag{26}$$

где $\eta_m = (\varphi-\varepsilon)/(\varphi+\varepsilon)$, $\nu_{1m} = \beta/(2\varphi+\beta)$.

Так же как и в случае обычных напряжений, для моментных напряжений оказываются справедливыми соотношения

$$\partial_t(\mu_{\beta\gamma} + \mu_{\gamma\beta}) = 2\varphi(\partial_\beta\omega_\gamma + \partial_\gamma\omega_\beta). \tag{27}$$

Матричные характеристические уравнения (14), (20), (24) и (25) полностью определяют динамику среды Коссера. Они избыточны и их выбор определяется контекстом задачи и методом её решения. При численном решении обязательными для реализации являются уравнения для продольных волн, в этом случае вычислительные схемы оказываются устойчивыми. В случае волн одного направления матричные характеристические уравнения дают столько же скалярных уравнений, сколько определяемых переменных. В обоих случаях вычислительный процесс является рекуррентным. Уравнения (22) и (27), а также то, что нормальные напряжения не зависят от ω_i, сильно упрощает процесс вычислений, сокращая число скалярных уравнений, в которых p_{ij} и ω_i оказываются связанными.

Существенное упрощение уравнений происходит в случае условия

$$\Omega^T = \frac{1}{2} rot\, u, \tag{28}$$

принятого для псевдоконтинуума Коссера.

Выражая операцию *rot* в матричной форме [10] и пользуясь (8), запишем

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma^T &= Q_i^T(\partial_i V^T + S_i \omega^T) = \\ &= Q_i^T(\partial_i V^T + \frac{1}{2} S_i S_m \partial_m V^T),\end{aligned} \tag{29}$$

и характеристические уравнения для обычных напряжений оказываются не связанными с аналогичными уравнениями для моментных напряжений.

Проведя вычисления (29), матрицу-строку $\partial_t \Gamma$ получим в виде

$$\partial_t \Gamma = \|\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{21} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31} \quad \varepsilon_{32}\|, \tag{30}$$

где $\varepsilon_{ij} = 2^{-1}(\partial_i V_j + \partial_j V_i),\ i,j = 1,2,3$ - скорости деформаций классической теории упругости.

Вводя дополнительные матрицы q_{ij} и e_i из формулы (5), приём, использованный при построении матрицы C_p, и проведя соответствующую группировку членов вокруг операторов ∂_i, можно получить $\partial_t \Gamma^T$ в виде

$$\partial_t \Gamma^T = \Theta_i^T \partial_i V^T, \tag{31}$$

где

$$\Theta_i = \begin{Vmatrix} \delta_{1i} & 0 & 0 & \delta_{2i}/2 & \delta_{3i}/2 & \delta_{2i}/2 & 0 & \delta_{3i}/2 & 0 \\ 0 & \delta_{2i} & 0 & \delta_{1i}/2 & 0 & \delta_{1i}/2 & \delta_{3i}/2 & 0 & \delta_{3i}/2 \\ 0 & 0 & \delta_{3i} & 0 & \delta_{1i}/2 & 0 & \delta_{2i}/2 & \delta_{1i}/2 & \delta_{2i}/2 \end{Vmatrix}.$$

Первое уравнение системы (8), записанное для псевдоконтинуума Коссера, имеет вид

$$\partial_t P^T = C_p \Theta_i \partial_i V^T, \tag{32}$$

откуда

$$\partial_t P = \partial_t \|\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{21} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \quad \sigma_{32}\|,$$

где σ_{ij} – напряжения классической безмоментной теории упругости. Для таких напряжений выполняются условия $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$, а следовательно характеристические уравнения для обычных и моментных напряжений оказываются несвязанными.

Для определения скорости волн в модели псевдоконтинуума Коссера рассмотрим произведения матриц $Q_\alpha C_p \Theta_\alpha^T, \alpha = 1,2,3$. Вычислением убеждаемся, что все эти произведения представляют собой диагональные матрицы, имеющие собственные значения $2\mu + \lambda$ и μ, а соответствующие им скорости волн $c_1 = \sqrt{(2\mu+\lambda)/\rho}$ и $c_2^* = \sqrt{\mu/\rho}$ те же, что и для обычного изотропного тела. Разница заключается только в том, что здесь матрица жёсткостей имеет вид C_p.

Первое уравнение системы (7) и уравнение (32) могут быть использованы для построения матричной характеристической формы уравнений динамики псевдоконтинуума Коссера. Для моментных напряжений построение остается прежним, с тем отличием, что члены $S_i Q_i P^T$ следует исключить из уравнений на движущихся разрывах.

Построим матричную характеристическую форму уравнений динамики псевдоконтинуума Коссера способом, рассмотренным выше.

Пусть, как и раньше, волна распространяется в обе стороны вдоль оси x_α. Проведём преобразования, аналогичные (12)-(14), и получим матричное характеристическое уравнение на движущихся разрывах

$$\begin{aligned}&\left(I_3 \partial_t \pm D^*_{\alpha p} \partial_\alpha\right)\left(P_\alpha^T \mp \rho D^*_{\alpha p}\right) = \\ &= C^*_{\alpha k} \partial_k V^T \mp D^*_{\alpha p}\left(\partial_k P_k^T + F^T\right),\end{aligned} \tag{33}$$

где $D^*_{1p} = diag(c_1, c_2^*, c_2^*),\ C^*_{\alpha k} = Q_\alpha C_p \Theta_k^T$,

или в скалярном виде:

$$\begin{aligned}&\left(\partial_t \pm c_1 \partial_\alpha\right)\left(\sigma_{\alpha\alpha} \mp \rho c_1 V_\alpha\right) = \lambda\left(\partial_\beta V_\beta + \partial_\gamma V_\gamma\right) \mp \\ &\mp c_1\left(\partial_\beta \sigma_{\beta\alpha} + \partial_\gamma \sigma_{\gamma\alpha} + f_\alpha\right), \\ &\left(\partial_t \pm c_2^* \partial_\alpha\right)\left(\sigma_{\alpha\beta} \mp \rho c_2^* V_\beta\right) = \mu\, \partial_\beta V_\alpha \mp \\ &\mp c_2^*\left(\partial_\beta \sigma_{\beta\beta} + \partial_\gamma \sigma_{\gamma\beta} + f_\beta\right), \\ &\left(\partial_t \pm c_2^* \partial_\alpha\right)\left(\sigma_{\alpha\gamma} \mp \rho c_2^* V_\gamma\right) = \mu\, \partial_\gamma V_\alpha \mp \\ &\mp c_2^*\left(\partial_\beta \sigma_{\beta\gamma} + \partial_\gamma \sigma_{\gamma\gamma} + f_\gamma\right).\end{aligned} \tag{34}$$

На неподвижных разрывах, в силу симметрии касательных напряжений, остается определить три напряжения $p_{\beta\beta}$, $p_{\gamma\gamma}$ и $p_{\beta\gamma}$. Введём матрицу N, выделяющую из матрицы-строки P указанные напряжения. Очевидно, эта матрица должна иметь вид $N = e_1^T q_{\beta\beta} + e_2^T q_{\gamma\gamma} + e_3^T q_{\beta\gamma}$. Далее, умножим $\partial_t P^T$ из уравнения (32) слева на N и выделим в правой части член, содержащий ∂_1; обозначая $P_N^T = NP^T$ и $C^*_{Ni} = NC_p\Theta_i, i = 1,2,3$ получим уравнение

$$\partial_t P_N^T = C^*_{Nk} \partial_k V^T + C^*_{N\alpha} \partial_\alpha V^T,\ \ k = \beta, \gamma. \tag{35}$$

Поскольку из формул (34) можно определить все компоненты матрицы P_α, умножим (32) слева на Q_α и выделим $\partial_\alpha V^T$ из получившегося уравнения

$$\partial_\alpha V^T = (C^*_{\alpha\alpha})^{-1}(\partial_t P_\alpha^T - C^*_{\alpha k} \partial_k V^T). \tag{36}$$

Подставляя $\partial_\alpha V^T$ из (36) в (35) и проводя соответствующую группировку, получаем окончательно матричное уравнение на неподвижных разрывах

$$\partial_t\left(P_N^T - C_{N\alpha}^*(C_{\alpha\alpha}^*)^{-1}P_\alpha^T\right) = = \left(C_{Nk}^* - C_{N1}^*(C_{11}^*)^{-1}C_{1k}^*\right)\partial_k V^T. \qquad (37)$$

Скалярная форма этого уравнения имеет следующий вид

$$\partial_t\left(\sigma_{\beta\beta} - \nu_1\sigma_{\alpha\alpha}\right) = \left(1-\nu_1\right)\left[\left(\mu+\lambda\right)\partial_\beta V_\beta + \lambda\,\partial_\gamma V_\gamma\right],$$
$$\partial_t\left(\sigma_{\gamma\gamma} - \nu_1\sigma_{\alpha\alpha}\right) = \left(1-\nu_1\right)\left[\left(\mu+\lambda\right)\partial_\gamma V_\gamma + \lambda\,\partial_\beta V_\beta\right], \qquad (38)$$
$$\partial_t\sigma_{\beta\gamma} = \mu\left(\partial_\beta V_\gamma + \partial_\gamma V_\beta\right).$$

Характеристические уравнения (34), (38) тождественны аналогичным уравнениям для изотропного симметрично упругого тела, построенным, например, как частный случай в [13].

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Построенные характеристические уравнения позволяют в рамках линейной теории Коссера решить целый спектр задач со связанными и несвязанными обычными и моментными напряжениями. В частности, теория псевдоконтинуума Коссера позволяет связать классическую и моментную механику и может служить первым этапом итеративного процесса численного расчета связанной задачи динамики среды Коссера.

Рассмотрим случай, когда $c_1 > c_3 \geq c_2 > c_4$ и рассматриваемая точка находится внутри тела. В этом случае продольные волны кручения взаимодействуют с поперечными волнами обычных напряжений и скоростей частиц. Схема взаимодействия представлена на **Рис. 1**.

Принимая за начальное приближение псевдоконтинуум Коссера, имеем не связанные характеристические уравнения для обычных и моментных напряжений. Определив угловые скорости частиц ω_i из левой части блок-схемы, подставляем их в уравнения для касательных напряжений; вычисленные касательные напряжения p_{ij} возвращаем назад в моментные уравнения на движущихся разрывах, обеспечивая тем самым рекуррентное вычисление ω_i и p_{ij}. При этом нормальные напряжения $p_{\alpha\alpha}$, соответствующие им

Рис. 1. *Схема взаимодействия продольных волн кручения с поперечными волнами обычных напряжений и скоростей частиц.*

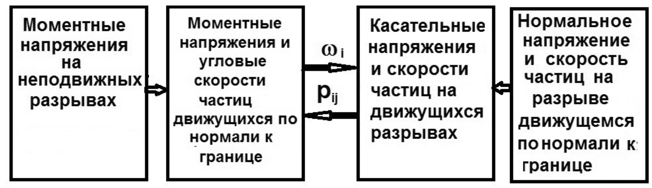

Рис. 2. *Схема построения вычислительных схем в граничной точке среды при той же последовательности вычисления скоростей.*

скорости V_α и касательные моментные напряжения $\mu_{\alpha\beta}$ непосредственно в обмене не участвуют, хотя $\mu_{\alpha\beta}$ и корректируются после каждого акта обмена. Для сокращения в два раза количества уравнений, участвующих в обмене, следует использовать уравнения (22), (25) и (32).

Для построения вычислительных схем в граничной точке среды при той же последовательности скоростей используем схему, показанную на **Рис. 2**.

Как указывалось выше, в граничной точке следует рассматривать уравнения для волн, движущихся изнутри тела по нормали к его границе, уравнения на неподвижных разрывах и граничные условия. В сумме этих уравнений и условий столько же, сколько и определяемых переменных, однако последовательность вычислений существенно зависит от вида граничных условий.

Рассмотрим правую часть рис. 2, в которой вычисляются p_{ij} и V_i. Как показывают формулы (15), (21) все нормальные напряжения p_{ii} и скорость частиц V_α, направленная по нормали к рассматриваемой границе x_α, могут быть вычислены независимо от ω_i по тем же формулам, что и в обычной симметричной теории упругости. Порядок вычисления остальных величин зависит от соответствующих граничных условий: пусть, например, на границе задано касательное напряжение $p_{\beta\alpha}$, тогда, в соответствии с уравнением

$$\partial_t(p_{\alpha\beta} + p_{\beta\alpha}) = 2\mu(\partial_\beta V_\alpha + \partial_\alpha V_\beta) \qquad (39)$$

определяется $p_{\alpha\beta}$, а из уравнения (16) определяется V_β, знак плюс или минус определяется положением границы: плюс соответствует границе $x_{\alpha\max}$, а минус – $x_{\alpha\min}$.

Если на границе задано V_β, то из (16) определяется $p_{\alpha\beta}$, а затем из (39) $p_{\beta\alpha}$.

Аналогично вычисляются $p_{\gamma\sigma}$, $p_{\alpha\gamma}$ и V_γ.

Величины $p_{\beta\gamma}$ и $p_{\gamma\beta}$ определяются из системы (21) и уравнения (22)

Теперь рассмотрим левую часть рис. 2,

где вычисляются угловые скорости частиц ω_i и моментные напряжения μ_{ij}. Рассмотрение также начнём с внутренней точки среды. Для устойчивости вычислительной схемы необходимо выбрать все уравнения для нормальных компонентов моментных напряжений $\mu_{\alpha\alpha}$, α = 1,2,3 и угловых скоростей частиц ω_α, оставшиеся напряжения можно получить независимо из 3 уравнений на неподвижных разрывах

$$\partial_t \mu_{\alpha\beta} = \varphi(\partial_\alpha \omega_\beta + \partial_\beta \omega_\alpha) + \varepsilon(\partial_\alpha \omega_\beta - \partial_\beta \omega_\alpha), \quad (40)$$

и уравнений (27). В граничной точке задаются 3 уравнения на разрывах, движущихся по нормали к границе $x_\alpha = const$ изнутри тела, 3 уравнения на неподвижных разрывах, 3 граничных условия и 3 уравнения, входящих в (27). В зависимости от граничного условия (ω_i или μ_{ij}) на движущихся разрывах определяется оставшаяся переменная (μ_{ij} или ω_i), затем с помощью (27) определяется μ_{ji} и, наконец, последние 3 напряжения $\mu_{\beta\beta}$, $\mu_{\gamma\gamma}$ и $\mu_{\beta\gamma}$ определяются соответствующими уравнениями системы (26).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье с помощью матричного аппарата, предложенного автором, построена матричная и скалярная формы характеристических уравнений динамики среды Коссера и псевдоконтинуума Коссера. Для построения использовались простейшие вспомогательные матрицы, состоящие из нулей и единиц, и тождественные преобразования. Порядок производных нигде не повышался, дополнительные условия не ставились. Количество построенных уравнений оказалось избыточным, поэтому далее рассматривался вопрос их выбора в различных случаях.

Показано, что характеристическая форма представления уравнений для псевдоконтинуума Коссера сводится к уравнениям для симметрично упругого изотропного тела, но с матрицей жесткостей модели Коссера. Это обстоятельство было использовано при численном моделировании динамики среды Коссера, при этом модель псевдоконтинуума рассматривалась как начальное приближение для схемы последовательных расчетов динамики ограниченных тел.

Согласно [11] внутри тела использовались уравнения для продольных волн, распространяющихся во всех трёх направлениях. В граничных точках, согласно [12], рассматривались все виды волн, подходящих изнутри тела, нормально к его границе. Поскольку в каждом типе волны, подходящей к границе, во времени изменяются те же переменные ($\varphi_{\alpha i}$, V_i или $\mu_{\alpha i}$, ω_i), что и в соответствующих граничных условиях, выбор вариантов взаимодействия волны с граничными условиями оказывается минимальным, а само это взаимодействие наиболее простым и удобным для численных расчетов.

При аппроксимации производной по времени односторонней разностью, а по координатам центральной разностью, остаточные члены во всех уравнениях имеют порядок $O(\partial_t^2, \partial_{x_i}^3)$ и погрешности счёта не накапливаются [13], а вычислительные схемы оказываются устойчивыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E, Cosserat F. *Theorie des corps deformables*. Paris, Hermann, 1909.
2. Коссера Эжен, Коссера Франсуа. Заметка о теории евклидовского действия (репринт). *РЭНСИТ,* 2013, 5(1):5-76; https://www.elibrary.ru/download/elibrary_19429292_61149270.pdf.
3. Кувшинский ЕВ, Аэро ЭЛ. Континуальная теория несимметричной упругости. *ФТТ,* 1963, 5(9):2591-2598.
4. Пальмов НА. Основные уравнения теории асимметричной упругости. *ПММ*, 1964, 28(3):401-408.
5. Новацкий В. *Теория упругости*. М., Мир, 1975, 852 с.
6. Морозов НФ. *Математические вопросы теории трещин*. М., Наука, 1984, 256 с.
7. Жилин ПА. Основные уравнения неклассической теории упругости оболочек. *Труды Ленингр. политехн. ин-та, № 386,* 1982, с. 29-46.
8. Ерофеев ВИ. *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. М., МГУ, 1999, 327 с.
9. Кунин ИА. *Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости*. М., Наука, 1975, 415 с.
10. Булычев ГГ. Характеристическая форма уравнений динамики сред сложной структуры. *РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии,* 2020, 12(2):245-252. DOI: 10.17725/rensit.2020.12.245.
11. Кукуджанов ВН. *Численное решение неодномерных задач распространения волн напряжений в твёрдых телах*. М., ВЦАН СССР, вып. 6, 1976, 67 с.
12. Butler DS. The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables. *Proc. Roy. Soc. of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1962, 255(1281):319-343. DOI: 10.2307/2413911.
13. Самарский АА. *Теория разностных схем*. М., Наука, 1989, 616 с.

Булычев Георгий Гавриилович

д.ф.-м.н., проф.

МИРЭА-Российский технологический университет

78, просп. Вернадского, Москва 119454, Россия

E-mail: geo-bulychev@mail.ru.