DOI: 10.17725/rensit.2021.13.495

Математическая модель системы функционирования космических аппаратов связи

[1]Зайцев М.А., [1]Коровин А.К., [2,3]Савилкин С.Б.,[3]Сухов А.В.
[1]Военная академия РВСН им. Петра Великого, https://varvsn.mil.ru/
Балашиха 143900, Московская область, Российская федерация
[2]Центр визуализации и спутниковых информационных технологий. Отделение разработки вычислительных систем НИИ Системных исследований РАН, https://niisi.ru/
Москва 117218, Российская Федерация
[3]Московский авиационный институт, https://mai.ru/
Москва 125993, Российская Федерация
E-mail: mihey-82@mail.ru, shurke@bk.ru, savilkin@mail.ru, avs57@mail.ru
Поступила 14.07.2021, рецензирована 23.07.2021, принята 30.07.2021
Представлена действительным членом РАЕН В.В. Колесовым

Аннотация: **В работе рассматривается математическая модель функционирования космических аппаратов связи, использующая системы дифференциальных уравнений для поступательного и вращательного движения, а также процесс распределения задач в группировке из трех космических аппаратов. Рассмотренная модель реализована средствами языка python3.6 и библиотеки вычислительных методов numpy 1.19. Проведена серия вычислительных экспериментов с целью оценки энергетических затрат на функционирование группировки с различными параметрами орбит и моделями внешних воздействий. Представленные результаты экспериментов позволяют сделать вывод о возможности повышения срока активного существования космических аппаратов путем совершенствования системы эксплуатации.**

Ключевые слова: **космические аппараты связи, математическая модель, система управления**

УДК 519.7

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Фундаментальные исследования 47 ГП) по теме № 0580-2021-0001 "Математическое обеспечение и инструментальные средства для моделирования, проектирования и разработки элементов сложных технических систем, программных комплексов и телекоммуникационных сетей в различных проблемно-ориентированных областях" (АААА-А19-119011790077-1).

Для цитирования: Зайцев М.А., Коровин А.К., Савилкин С.Б., Сухов А.В. Математическая модель системы функционирования космических аппаратов связи. *РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*, 2021, 13(4):495-500. DOI: 10.17725/rensit.2021.13.495.

Development of a mathematical model of functioning system communications spacecraft

Mikhail A. Zaytsev, Alexander K. Korovin
The Military Academy of Strategic Rocket Troops after Peter the Great, https://varvsn.mil.ru/
Balashikha 143900, Moscow region, Russian Federation
E-mail: mihey-82@mail.ru, shurke@bk.ru

Sergey B. Savilkin
Center of Visualization and Satellite Information Technologies, Scientific Research Institute of System Analysis of RAS, https://niisi.ru/
Moscow 117218, Russian Federation
Moscow Aviation Institute, https://mai.ru/

Moscow 125993, Russian Federation
E-mail: savilkin@mail.ru

Andrey V. Sukhov
Moscow Aviation Institute, https://mai.ru/
Moscow 125993, Russian Federation
E-mail: avs57@mail.ru

Received July 14, 2021, peer-reviewed July 23, 2021, accepted July 30, 2021

Abstract: **The paper discusses a mathematical model of the functioning of communication spacecraft, using systems of differential equations for translational and rotational motion, as well as the process of distributing problems in a constellation of three satellites. The model is implemented by means of the python 3.6 language and the computational method library numpy1.19. A series of computational experiments was carried out in order to estimate the energy costs for the operation of grouping with various orbital parameters and external impact models. The presented results of the experiments suggest the possibility of increasing the life of spacecraft by improving the operating system.**

Keywords: **communication spacecraft, mathematical model, control system**

UDC 519.7

Acknowledgments: The work is made as part of national assignment for SRISA RAS (fundamental scientific research 47 GP) on the topic No. FNEF-2021-0001 (0580-2021-0001), reg. No. 121031300047-6 "Software and tools for modeling, design and development of elements of complex technical systems, software systems and telecommunication networks in various problem-oriented areas"(AAAA-A19-119011790077-1).

For citation: Mikhail A. Zaytsev, Alexander K. Korovin, Sergey B. Savilkin, Andrey V. Sukhov. Development of a mathematical model of functioning system communications spacecraft. *RENSIT: Radioelectronics. Nanosystems. Information technologies*, 2021, 13(4):495-500. DOI: 10.17725/rensit.2021.13.495.

Содержание

1. ВВЕДЕНИЕ

Совершенствование системы управления эксплуатацией космических аппаратов (КА) связи является актуальной технической задачей. Одним из важных направлений в исследовании этого вопроса является оптимизация энергетических затрат на поддержание заданного состояния КА. В зависимости от полноты учитываемых факторов, в исследованиях используются математические модели различных уровней сложности. В практике при заданных ограничениях обычно используются детерминированные или стохастические линейные модели в пространстве состояний.

Пространство состояний образуется множеством векторов с минимальным числом координат, содержащих всю необходимую информацию о движении КА. В заданном таким образом пространстве состояний линейные математические модели имеют формальное представление вида [1-3]:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \qquad (1)$$

где $x^T = (x_1, x_2, ..., x_r)$ – вектор состояния, T – символ транспонирования; $A(t)$ – матрица, характеризующая динамические свойства модели; $B(t)$ – матрица, характеризующая интенсивность управляющего воздействия; $u^T(t) = (u_1, u_2, ..., u_r)$ – управляющее воздействие.

Поведение системы (1) на промежутке времени $[0,t]$ определяется заданием начальных условий $x(t = 0)$ и описывается выражением [1,2]:

$$x(t) = N(t,0)x(0) + \int_0^t N(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \qquad (2)$$

где $N(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ – матрица влияния исходной системы; $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица однородной системы $\dot{x} = A(t)x(t)$.

Аналитическое решение в общем виде найти не представляется возможным, поэтому возникает необходимость представления математических моделей движения КА в конечных разностях. В дискретной форме при условии, что управляющее воздействие $u(t)$ сохраняет неизменным свое значение на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$, выражение (2) примет вид:

$$x(t_{n+1}) = N(t_{n+1}, t_n)x(t_n) + \\ +u(t_n)\int_{t_n}^{t_{n+1}} N(t_{n+1}, \tau)B(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Введем следующие обозначения:

$$x(t_{n+1}) = x_{n+1},$$

$$u(t_{n+1}) = u_{n+1},$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} N(t_{n+1}, \tau)B(\tau)d\tau = \Gamma(t_n) = \Gamma_n,$$

$$N(t_{n+1}, t_n) = N_{n+1,n}.$$

С учётом введённых обозначений выражение (3) примет вид [3]:

$$x_{n+1} = N_{n+1,n}x_n + \Gamma_n u_n.$$

При исследовании движения КА в условиях реальной эксплуатации допущение о детерминированности внешних воздействий и функциональных параметров приемлемо только на сравнительно коротких промежутках дискретизации по времени.

Описанию свойств динамических систем, подверженных случайным возмущениям, посвящены работы Л.С. Понтрягина и его учеников. Дальнейшее развитие идей об управлении сложными техническими системами нашло отражение в применении искусственного интеллекта на базе информационно-системной избыточности [4]. Задача оптимального управления в информационном пространстве решена в работах [6,7].

Основная задача оптимального управления КА формулируется следующим образом: среди всех допустимых управлений, переводящих изображающую точку в фазовом пространстве системы из начального положения в конечное, требуется найти такое управление, при котором достигается минимум следующего функционала [2].

$$I^*(x,u) = \min \sum_{n=0}^{N-1} G_n(x_n, u_n) + \varphi(x_N),$$

где n – номер дискретного шага по времени; G – функционал затрат на управление КА; в частном случае, когда рассматривается задача оптимальности по энергозатратам на управление, подынтегральная функция $G(x,u) \equiv |u|$; $\varphi(x_K)$ – слагаемое, учитывающее способность КА выполнить задачу по предназначению в конечном состоянии.

Минимизируемый функционал $I(\cdot)$ является инверсной эффективностью управления. Данное отображение не всегда удается определить как однозначное, поэтому используется более общий вид функционала.

Решение поставленной задачи методом динамического программирования позволяет свести задачу к последовательной минимизации функции r переменных (размерность вектора управления u).

Допустим, что все значения оптимального управления u_n, кроме последнего, найдены, и система находится в состоянии x_{N-1}. Согласно принципу оптимальности управление u_{N-1} должно быть также оптимальным.

Это управление должно доставлять минимум функционалу, который с учетом ограничений, которые накладывают требования к обеспечению сеанса связи на заданном участке траектории КА, для участка траектории $(N-1)$ имеет вид [2]:

$$I_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) = G_{N-1}\left[x_{N-1}, u_{N-1}\right] + \varphi\left[x_N\right].$$

Обозначим

$$S_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in U} I_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}).$$

Тогда рекуррентная формула для определения минимального значения функционала $I_{K-k}(x,u)$ и соответствующего оптимального управления $\vec{u}(K-k)$ на k-м шаге будет иметь вид:

$$S_{K-k}(x_{K-k}) = \min_{u_{K-k} \in U}\{G_{K-k}(x_{K-k}, u_{K-k}) + \\ +S_{K-k+1} f(x_{K-k}, u_{K-k})\}.$$

Оптимальное управление $\vec{u}(K-k)$ определяется как функция координат состояния системы $\vec{u}(K-k) = \vec{u}(x_{K-k})$. Вычисляя последовательно значения функции $S_{k=K}$, получим минимальное значение функционала для всей траектории. Одновременно определяется и оптимальное управление в функции координат системы, т.е. решается задача синтеза оптимального регулятора. Указанная процедура выполняется с помощью ЭВМ. Таким образом, применение принципа оптимальности позволяет существенно упростить вычисления по сравнению с аналитическим методом решения задачи на условный экстремум.

2. МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим замкнутую дискретную систему управления КА (**Рис. 1**). На вход управляющего устройства поступает задающее воздействие x_n^*, которое определяет, каким должно быть желаемое состояние объекта. Управляющее устройство вырабатывает *r*-мерное управляющее воздействие u_n на объект управления – КА. На движение КА оказывают влияние внешние возмущающие факторы w_n. Значение вектора состояния КА x_n определяется с помощью измерительных устройств, имеющих погрешность d_n (шумы измерения). Система считается полностью наблюдаемой, если по вектору измерения *z* могут быть найдены значения всех элементов вектора состояния *x*.

Вектор состояния КА характеризуется координатами [1,3]:

$$x = \{x_c, y_c, z_c, v_x, v_y, v_z, m, \psi, \theta, \gamma, \omega_\psi, \omega_\theta, \omega_\gamma, I_\psi, I_\theta, I_\gamma\},$$

где x_c, y_c, z_c – координаты центра масс КА; v_x, v_y, v_z – проекции вектора скорости на оси координат, *m* – масса КА; ψ, θ, γ – углы, определяющие поворот КА относительно неподвижной системы координат с началом в центре масс; ω_ψ, ω_θ, ω_γ – проекции угловой скорости КА; I_ψ, I_θ, I_γ – проекции тензора инерции КА.

Вектор внешних возмущений складывается из воздействий нестабильного гравитационного поля Земли и других космических тел [1,3]:

$$w = \{F_{Gx}, F_{Gy}, F_{Gz}, \delta F_x, \delta F_y, \delta F_z, \delta M_\psi, \delta M_\theta, \delta M_\gamma\},$$

где F_{Gx}, F_{Gy}, F_{Gz} – детерминированная составляющая действия сил гравитационного притяжения Земли, δF_x, δF_y, δF_z – случайное воздействие линейных сил космических тел, δM_ψ, δM_θ, δM_γ – случайные моменты вращения.

Поступательное и вращательное движение КА описывается системой дифференциальных уравнений (СДУ) [1]:

$$\dot{x} = x_0 + v_x t,$$
$$\dot{y} = y_0 + v_y t,$$
$$\dot{z} = z_0 + v_z t,$$

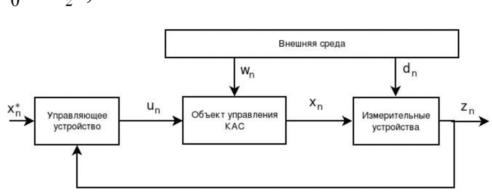

Рис. 1. *Модель системы функционирования КА.*

$$\dot{v}_x = v_{x0} + \frac{F_{Gx} + \delta F_x}{m} t,$$
$$\dot{v}_y = v_{y0} + \frac{F_{Gy} + \delta F_y}{m} t,$$
$$\dot{v}_z = v_{z0} + \frac{F_{Gz} + \delta F_z}{m} t,$$
$$\dot{\psi} = \psi_0 + \omega_\psi t,$$
$$\dot{\theta} = \theta_0 + \omega_\theta t,$$
$$\dot{\gamma} = \gamma_0 + \omega_\gamma t,$$
$$\dot{\omega}_\psi = \omega_\psi + \frac{M_\psi}{I_\psi} t,$$
$$\dot{\omega}_\theta = \omega_\theta + \frac{M_\theta}{I_\theta} t,$$
$$\dot{\omega}_\gamma = \omega_\gamma + \frac{M_\gamma}{I_\gamma} t,$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты центра масс КА в начальный момент времени, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – координаты центра масс КА в заданный момент времени, $\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z$ – компоненты линейной скорости КА в заданный момент времени, $\psi_0, \theta_0, \gamma_0$ – угловое положение КА в начальный момент времени, $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\gamma}$ – угловое положение КА в заданный момент времени, $\dot{\omega}_\psi, \dot{\omega}_\theta, \dot{\omega}_\gamma$ – угловая скорость КА в заданный момент времени.

Система решается с помощью двухэтапного метода Рунге-Кутта (метод Хойна) по схеме предиктор-корректор [5] следующего вида:

Предиктор:

$$\tilde{b}_i = b_{i-1} + (a_i - a_{i-1}) f(a_{i-1}, b_{i-1}).$$

Корректор:

$$b_i = b_{i-1} + (a_i - a_{i-1}) \frac{f(a_{i-1}, b_{i-1}) + f(a_i, \tilde{b}_i)}{2}.$$

Импульсная двухпараметрическая трехкомпонентная коррекция осуществляется с целью поддержания параметров орбиты КА и сохранения ориентации во время сеанса связи. В модели используется гипотеза о мгновенном изменении линейной и угловой скоростей, при этом учитываются лишь затраты энергии на проведения коррекции:

$$E_x = m_{KA} \frac{\Delta V^2}{2},$$
$$E_w = \frac{I_z \Delta\omega^2}{2}.$$

Для определения моментов подачи и величины корректирующих импульсов использован алгоритм квазиоптимального управления, минимизирующий энергозатраты на поддержание заданных параметров орбиты.

$$i_c = 00.02.00^{+00.06.00}$$
$$\Omega_c = 00.00.00$$
$$\omega_c = 00.00.00$$
$$e_c = 00.01.16^{+0.0035}$$
$$p_c = 42050$$
$$\nu_c = 30.00.00^{+00.06.00}.$$

Для представленной математической модели разработана объектно-ориентированная модель с тремя сущностями: SpaceShip – космический аппарат; Earth – планета Земля; Environment – внешняя среда.

Имитационная модель реализована средствами языка **python 3.6** с использованием библиотеки **numpy v1.19**, визуализация реализована средствами библиотеки **matplotlib v3.3.1**.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проведен эксперимент с группировкой из трех КА, обеспечивающих выполнение целевой задачи в течении одних суток. Полученные траектории КА без моделирования внешних воздействий верифицированы с заданными характеристиками орбиты и с заданной относительной погрешностью, не превышающей 10^{-4} по каждой координате.

С учетом распределения времени выполнения задач по предназначению (обеспечение ретрансляции сигналов) между тремя КА, проведено моделирование движения с учетом возмущающих воздействий внешней среды (**Рис. 2**). В ходе эксперимента получены оценки энергозатрат на поддержание заданных характеристик орбит для КА, движущихся по различным траекториям (**Рис. 3**).

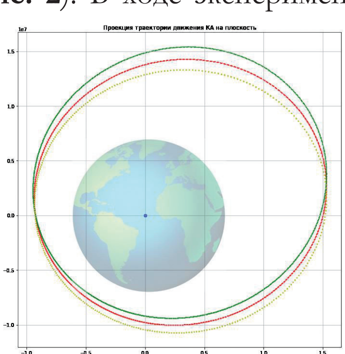

Рис. 2. *Проекция траектории движения КА на плоскость.*

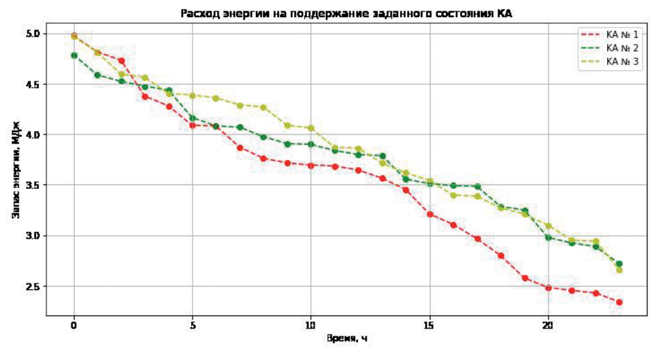

Рис. 3. *Расход энергии на поддержание заданного состояния КА.*

Исходя из полученного эмпирическим путем среднего расхода энергии 0.1 МДж/ч, проведен эксперимент, в котором исследовалось среднее время работы КА от характера и величины возмущающих воздействий на него. Результаты приведены на графике **Рис. 4**.

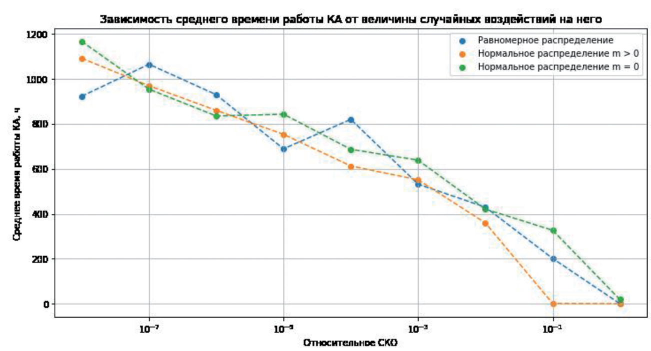

Рис. 4. *Среднее время работы КА при различных воздействиях.*

Исходя из полученного эмпирическим путем среднего расхода энергии 0.1 МДж/ч, проведен эксперимент, в котором исследовалось среднее время работы КА от характера и величины отношения сигнал/шум в измерительном канале. Результаты приведены на графике **Рис. 5**.

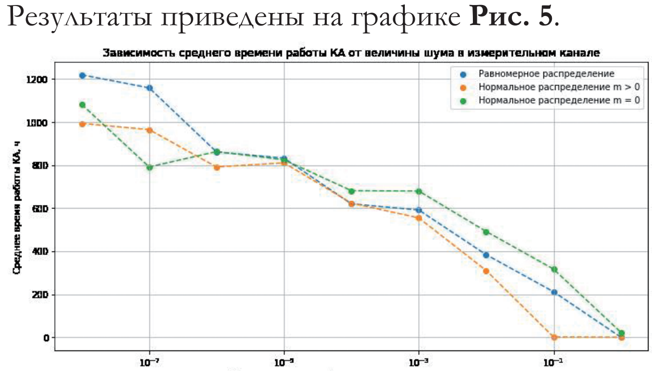

Рис. 5. *Среднее время работы КА при различных шумах измерений.*

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, разработанная модель позволяет исследовать энергетическую эффективность алгоритмов управления в различных режимах функционирования как одного КА, так и группировки КА с учетом ограничений, накладываемых выполнением задачи по обеспечению связи. Проведенные эксперименты свидетельствуют о возможности повышения срока активного существования космических аппаратов путем оптимизации системы эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдуевский ВС, Антонов БМ, Анфимов НА. и др. *Основы теории полета космических аппаратов*. М., Машиностроение, 1972.
2. Балакин ВЛ, Баяндина ТА. *Оптимальное управление летательными аппаратами* [Электронный ресурс]: электрон. курс лекций. Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва, Самара, Электрон, 2013.
3. Кринецкий ЕА и др. *Летные испытания ракет и космических аппаратов*. М., Машиностроение, 1979.
4. Потюпкин АЮ, Чечкин АВ. *Искусственный интеллект на базе информационно-системной избыточности*. М., Наука, 2019.
5. Самарский АА, Гулин АВ. *Численные методы*. М., Наука, 1989.
6. Качанов АЮ, Зайцев МА, Дубинин ДП. Оценка возможностей действующей системы спутниковой связи при решении задач информационного обмена в информационно-коммуникационном пространстве для обеспечения управления динамическими объектами. *Труды V Всероссийской научно-технической конференции "РТИ Системы ВКО-2017"*. М., МВТУ им. НЭ Баумана, 2018, с. 113-119.
7. Сухов АВ, Зайцев МА. Использование энтропии покрытия при информационном анализе результатов радиомониторинга спутниковых систем. *Транспортное дело России,* 2013, 6:156-159.

Зайцев Михаил Алексеевич
к.т.н.
Военная академия РВСН им. Петра Великого
Балашиха 143900, Московская область, Россия
mihey-82@mail.ru

Коровин Александр Константинович
старший научный сотрудник
Военная академия РВСН им. Петра Великого
Балашиха 143900, Московская область, Россия
shurke@bk.ru

Савилкин Сергей Борисович
к.ф-м.н, доцент
НИИ Системных исследований РАН
36/1, Нахимовский просп., Москва 117218, Россия
savilkin@mail.ru

Сухов Андрей Владимирович
д.т.н., профессор
Московский авиационный институт
4, Волоколамское шоссе, Москва 125993, Россия
avs57@mail.ru.