DOI: 10.17725/rensit.2022.14.039

Оптический метаматериал с близким к нулю случайным показателем преломления

[1]Гадомский О.Н., [2,3]Ушаков Н.М., [1]Гадомская И.В., [1]Мусич Д.О.

[1]Ульяновский государственный университет, https://www.ulsu.ru/
Ульяновск 432017, Российская Федерация
[2]ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал, http://www.cplire.ru/rus/sfire/
Саратов 410019, Российская Федерация
[3]Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, https://www.sgu.ru/
Саратов 410012, Российская Федерация
E-mail: gadomsky@mail.ru, nmu@bk.ru, gadomskaya@mail.ru, musich@mail.ru

Поступила 15.02.2022, рецензирована 22.02.2022, принята 29.02.2022

Представлена действительным членом РАЕН С.П. Губиным

Аннотация: **Получено соотношение для комплексного показателя преломления оптического метаматериала с учетом структурного фактора, определяющего дискретное распределение включений в композите. Показано, что малое случайное изменение структурного фактора приводит к значительному уменьшению показателя преломления метаматериала в широком диапазоне длин волн видимого и ИК-спектров. Полученные теоретические результаты подтверждены экспериментом на примере синтезированного метаматериала из полимерной матрицы с наночастицами серебра.**

Ключевые слова: **оптический метаматериал, показатель преломления близкий к нулю, структурный фактор, наночастицы серебра, полиметилметакрилат**

УДК 546.722+546.271

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (государственное задание № FFWZ-2022-0002).

Для цитирования: Гадомский О.Н., Ушаков Н.М., Гадомская И.В., Мусич Д.О. Оптический метаматериал с близким к нулю случайным показателем преломления. *РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*, 2022, 14(1):39-46. DOI: 10.17725/rensit.2022.14.039.

Optical Metamaterial with Near-Zero Random Refractive Index

Oleg N. Gadomsky, Irina V. Gadomskaya, Dmitrii O. Musich

Ulyanovsk State University, https://www.ulsu.ru/
Ulyanovsk 432017, Russian Federation
E-mail: gadomsky@mail.ru, gadomskaya@mail.ru, musich@mail.ru

Nickolay M. Ushakov

Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov branch, http://www.cplire.ru/rus/sfire/
Saratov 410019, Russian Federation
Chernyshevsky Saratov State University, https://www.sgu.ru/
Saratov 410012, Russian Federation
E-mail: nmu@bk.ru

Received Februar 15, 2021, peer-reviewed Februar 22, 2021, accepted Februar 29, 2021

Abstract: **A relation is obtained for the complex refractive index of an optical metamaterial, taking into account the structural factor that determines the discrete distribution of inclusions in the composite. It is shown that a small random change in the structure factor leads to a significant decrease in the refractive index of the metamaterial in a wide range of visible and IR wavelengths.**

The obtained theoretical results are confirmed by experiment on the example of a synthesized metamaterial from a polymer matrix with silver nanoparticles.

Keywords: **optical metamaterial, refractive index close to zero, structure factor, silver nanoparticles, polymethyl methacrylate**

UDC 546.722+546.271

Acknowledgments: The work is performed under (partial) financial support of Russian Ministry of Science and Higher Education (Government Task No. FFWZ-2022-0002).

For citation: Oleg N. Gadomsky, Nickolay M. Ushakov, Irina V. Gadomskaya, Dmitrii O. Musich. Optical Metamaterial with Near-Zero Random Refractive Index. *RENSIT: Radioelectronics. Nanosystems. Information technologies*, 2022, 14(1):39-46. DOI: 10.17725/rensit.2022.14.039.

Содержание

1. **Введение (40)**
2. **Вектор поляризации композитной среды со сферическими наночастицами серебра (41)**
3. **Показатель преломления метаматериала с наночастицами серебра с учетом структурного фактора (42)**
4. **Численный эксперимент (43)**
5. **Заключение (45)**

Литература (45)

1. ВВЕДЕНИЕ

Можно ли с помощью малого (около 3 масс. %) содержания и случайного расположения металлических наночастиц в диэлектрической матрице в десять и более раз уменьшить показатель преломления этой матрицы? В данной статье дано теоретическое обоснование возможности такого структурного перехода. Более того, будет показано, что этот структурный переход наблюдается экспериментально в метаматериале PMMA+Ag с наночастицами серебра, синтезированного по разработанной нами технологии [1,2].

Как правило для моделирования оптических свойств композитных материалов со случайными включениями применяется формула Гарнетта [3,4], на основе которой можно доказать возможность достижения нулевого показателя преломления в узком диапазоне длин волн при определенных значениях диэлектрической проницаемости матрицы. В обзоре [3] достаточно подробно анализируются различные методы математического моделирования эффективной диэлектрической проницаемости различных композитных материалов. Не вдаваясь в детали этих методов, отметим лишь то, что композитные материалы в них рассматриваются в рамках концепции непрерывной среды. В данной статье используется концепция дискретно-непрерывной среды, учитывая дискретное распределение наночастиц в окрестности любой наночастицы композита. При этом область дискретности имеет линейные размеры, значительно меньшие длины волны внешнего излучения, поэтому эта область не рассматривается как рассеивающая свет неоднородность. Как показано в [5], в диэлектрике, состоящем из атомов или молекул, в рамках концепции дискретно-непрерывного диэлектрика показатель преломления диэлектрика всегда является флуктуирующим в окрестности некоторого среднего значения. При этом величина этих флуктуаций около 1-2%. В [5] было отмечено также, что роль этих флуктуаций значительно возрастает вблизи границы диэлектрика, где образуется квазикристаллический переходный слой, что позволило объяснить аномалии в формулах Френеля при брюстеровском отражении света [6]. В данной статье будет показано, что в дискретно-непрерывном композитном материале с небольшим весовым содержанием серебра показатель преломления композита не только значительно уменьшается, но и флуктуирует в окрестности нулевого значения в широком диапазоне длин волн, по крайней мере, от 450 до 1200 нм. Более того, этот диапазон длин волн является областью прозрачности композита, где показатель поглощения значительно меньше показателя преломления. Идея о случайном близком к нулю показателе преломления позволила объяснить

экспериментальные спектры отражения и пропускания нанокомпозитного слоя на стекле. Ранее в серии работ [7-11] были описаны обнаруженные авторами эффекты такие, как интерференция света в толстых композитных слоях, толщина которых значительно больше длины волны [7], усиленное оптическое пропускание композитного слоя по сравнению с оптическим пропусканием слоя из материала матрицы композита той же толщины [8], незеркальное отражение света на неоднородной границе раздела двух сред и в наноструктурном слое с близким к нулю показателем преломления [9], нарушение принципа обратимости световых потоков в оптической среде со случайным близким к нулю показателем преломления [10], локализация фотонов в метаматериалах с показателем преломления близким к нулю [11]. В работе [12] показано, что все эти эффекты можно описать теоретически с помощью нефренелевских формул для коэффициентов отражения и пропускания слоя со случайным близким к нулю показателем преломления.

Поэтому целью данной статьи является дальнейшее развитие математического аппарата полезного для описания оптических свойств дискретно-непрерывной среды. Ниже будет выведена формула для комплексного показателя преломления композитного метаматериала с учетом структурного фактора и будет показано, что эта формула переходит в формулу Гарнетта для непрерывной эффективной среды.

2. ВЕКТОР ПОЛЯРИЗАЦИИ КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЫ СО СФЕРИЧЕСКИМИ НАНОЧАСТИЦАМИ СЕРЕБРА

Для размерной поляризации вектор поляризации **P** композитной среды запишем в виде:

$$\mathbf{P}=\left(N_0\alpha_p\frac{n_0^{\,2}+2\varepsilon_m}{3\varepsilon_m}+N_m\alpha_m\frac{\varepsilon_m+2}{3}\right)\mathbf{E}, \quad (1)$$

где **E** – напряженность макроскопического электрического поля, $n_0^2 = \varepsilon_0$ – комплексная диэлектрическая проницаемость массивного серебра, ε_m – диэлектрическая (вещественная) проницаемость диэлектрической матрицы (полиметилметакрилат), N_0 – концентрация серебряных сферических наночастиц серебра, N_m концентрация диполей в матрице, α_m, α_p – поляризуемость матрицы и наночастиц серебра соответственно. При этом: $N_m\alpha_m = (3/4\pi)(\varepsilon_m - 1)/(\varepsilon_m + 2)$, $\varepsilon_m = n_m^2$, $n_m = 1.49$. Поляризуемость наночастицы серебра представим как:

$$\alpha_p = a^3\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_m}{\varepsilon_0+2\varepsilon_m}, \quad (2)$$

где α – радиус наночастицы.

При подстановке (2) в формулу Лорентц-Лоренца получим формулу Гарнетта [3]:

$$\varepsilon=\varepsilon_m+\frac{3p\varepsilon_m\left(\varepsilon_0-\varepsilon_m\right)}{\left(\varepsilon_0+2\varepsilon_m\right)-p\left(\varepsilon_0-\varepsilon_m\right)}, \quad (3)$$

где $p = (4\pi/3)\alpha^3 N_0$ – объемная доля наночастиц в полимерной матрице. Эта формула обычно применяется для описания непрерывных сред с включениями. Для наночастиц малого радиуса $\alpha = (2\div7)$ нм в рассматриваемых в данной статье метаматериалах $p << 1$.

Перейдем в формуле (1) от размерной поляризуемости (2) к безразмерной поляризуемости α_{eff}, которая может быть представлена как:

$$\alpha_{eff}=\mathrm{Re}\left(\alpha_{eff}\right)+i\,\mathrm{Im}\left(\alpha_{eff}\right), \quad (4)$$

где

$$\mathrm{Re}\left(\alpha_{eff}\right)=\frac{N_0a^3}{3\varepsilon_m}\left(\varepsilon_{10}-\varepsilon_m\right)+\frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon_m-1\right),$$
$$\mathrm{Im}\left(\alpha_{eff}\right)=\frac{N_0a^3}{3\varepsilon_m}\varepsilon_{20}. \quad (5)$$

Рассмотрим диэлектрическую матрицу с помощью реального значения ε_m, а серебряную наночастицу с помощью комплексной диэлектрической проницаемости $n_0^2 = \varepsilon_{10} + i\varepsilon_{20}$ массивного серебра. При этом в соответствии с [13]:

$$\varepsilon_{10}\left(\lambda\right)=1-\frac{\omega_p^{\,2}\tau^2}{1+\left(2\pi\tilde{n}/\lambda\right)^2\tau^2},$$
$$\varepsilon_{20}\left(\lambda\right)=\frac{\omega_p^{\,2}\tau}{\left(2\pi\tilde{n}/\lambda\right)\left(1+\left(2\pi\tilde{n}/\lambda\right)^2\tau^2\right)}, \quad (6)$$

где плазменная частота ω_p = 1.386·10^{16} рад/сек, τ = 31·10^{-15} сек. В массивном серебре на длине волны λ = 0.5893·10^{-4} см реальная часть показателя преломления n_0 = 0.2, а мнимая часть показателя преломления k_0 = 3.44 [14]. Используя эти численные значения, получим ε_{10} = –17.786 и ε_{20} = 0.18. Тогда Re(α_{eff}) = 0.0948 и $Im(\alpha_{eff})$ = 0.192·10^{-4}. Аналогичным образом для других длин волн в диапазоне от 450 до 1200 нм получим следующее соотношение:

$$\frac{\mathrm{Im}\left(\alpha_{eff}\right)}{\mathrm{Re}\left(\alpha_{eff}\right)} << 1. \tag{7}$$

Это соотношение означает, что рассматриваемый метаматериал с наночастицами серебра обладает высокой прозрачностью.

3. ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ МЕТАМАТЕРИАЛА С НАНОЧАСТИЦАМИ СЕРЕБРА С УЧЕТОМ СТРУКТУРНОГО ФАКТОРА

Относительный показатель преломления (n/n_m) композитной среды определим с помощью следующего соотношения:

$$\frac{4\pi}{\left(n/n_m\right)^2-1}\alpha_{eff} = 1-\beta\alpha_{eff}-\frac{4\pi}{3}\alpha_{eff}, \tag{8}$$

где структурный фактор определяется как

$$\beta = \frac{2}{N_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 n_m{}^2 \sum_a \frac{\exp\left(i\mathbf{k}\mathbf{R}_a\right)}{R_a}. \tag{9}$$

Суммирование в (9) производится по местоположениям наночастиц внутри сферы Лорентца, радиус которой значительно меньше длины волны λ, **k** – волновой вектор волны поляризации в композите, $|\mathbf{k}| = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)n_m$, $\mathbf{R}_\alpha$ – радиус-вектор центров наночастиц.

Мы предположили (8), что вектор поляризации в точках $\mathbf{R}_\alpha$ внутри сферы Лорентца одинаков в различных точках $\mathbf{R}_\alpha$, то есть $\mathbf{P}_\alpha \approx \mathbf{P}$. В структурном факторе (9) учтена лишь одна часть поля диполей внутри сферы Лорентца, пропорциональная $1/R_\alpha$. Другие части поля диполей, пропорциональные $1/R_\alpha{}^3$ и $1/R_\alpha{}^2$ обращаются в нуль для различных типов дискретного распределения наночастиц. В электродинамике диэлектриков принято считать, что поле дискретно-распределенных диполей атомов (молекул) в окрестности любой точки наблюдения равно нулю. Однако, для дискретно-непрерывных сред запаздывающая часть поля диполей в окрестности точек наблюдения отлична от нуля при любом типе симметрии в расположении атомов или молекул [5]. Это свойство диэлектриков соответствует эффекту ближнего поля. Структурный фактор в рассматриваемом оптическом метаматериале с наночастицами серебра и есть проявление эффекта ближнего поля, но теперь вместо атомов (молекул) рассматриваются наночастицы серебра в окрестности точек наблюдения. Вычисление структурного фактора связано с вычислением решеточных сумм идеальной кубической решетки, в которой роль постоянной решетки выполняет среднее расстояние между центрами сферических наночастиц. При этом случайное отклонение от идеальной решетки определяется с помощью случайного параметра порядка единицы.

Решеточная сумма для кубической решетки имеет вид [15]:

$$S_0 = \sum_a \frac{\exp\left(i\mathbf{k}\mathbf{R}_a\right)}{R_a} = \frac{4\pi N_0 \lambda^2}{\left(2\pi\right)^2 n_m{}^2}. \tag{10}$$

Представим структурный фактор (9) с учетом (10) как:

$$\beta = 8\pi s_0, \tag{11}$$

где s_0 – безразмерный случайный параметр, учитывающий отклонение дискретного распределения наночастиц от кубического в композите с равномерным распределением наночастиц с концентрацией N_0. При 3%-м весовом содержании серебра в полимере и радиусе наночастиц α = 2.5 нм среднее расстояние между центрами наночастиц равно 28 нм, что позволяет не учитывать взаимодействие между наночастицами.

Из уравнения (8) получим следующую формулу для комплексного показателя преломления метаматериала с включениями:

$$\frac{\left(n+i\kappa\right)^2}{n_m{}^2} = \frac{1+\frac{8\pi}{3}\frac{\alpha_{eff}}{1-\beta\alpha_{eff}}}{1-\frac{4\pi}{3}\frac{\alpha_{eff}}{1-\beta\alpha_{eff}}}. \tag{12}$$

В непрерывной среде, когда $\beta = 0$ и $N_0\alpha_p >> N_m\alpha_m$, формула (12) совпадает с формулой Гарнетта [3]. Ниже будет показано, что при $\beta\alpha_{eff} \approx 1$ возможно достижение нулевого и близких к нулю значений показателя преломления.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для полимерной матрицы из полиметилметакрилата с показателем преломления равным 1.49 наличие малой концентрации включений делает $N_0\alpha_p$ близким по величине к $N_m\alpha_m$. Так, в рассмотренном выше численном примере при 3%-весовом содержании серебра в композите $N_0 = 0.455\cdot10^{17}$ см$^{-3}$, α = 2.5 нм, отрицательная часть $\mathrm{Re}(\alpha_{eff})$, связанная с наночастицами серебра меньше положительной части $\mathrm{Re}(\alpha_{eff})$, связанной с полимерной матрицей. При точном обращении в нуль показателей преломления и поглощения композита числитель в формуле (12) обращается в нуль, а знаменатель отличен от нуля. В результате получим два уравнения

$$1+\mathrm{Re}\left(\alpha_{eff}\right)\left(\frac{8\pi}{3}-\beta\right)=0,$$
$$\left(-\frac{8\pi}{3}+\beta\right)\mathrm{Im}\left(\alpha_{eff}\right)=0. \qquad (13)$$

Оценим значения структурного фактора β, при котором $n = k = 0$. С учетом соотношения (7) второе уравнение (13) с высокой точностью выполняется, а из первого уравнения получим для параметра s_0 следующее соотношение:

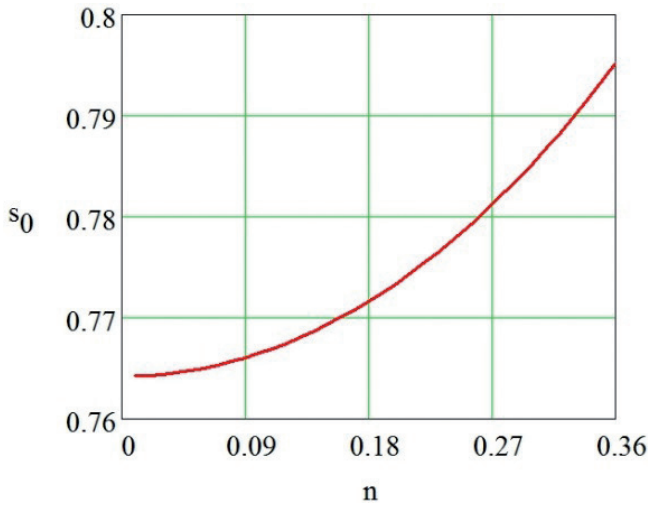
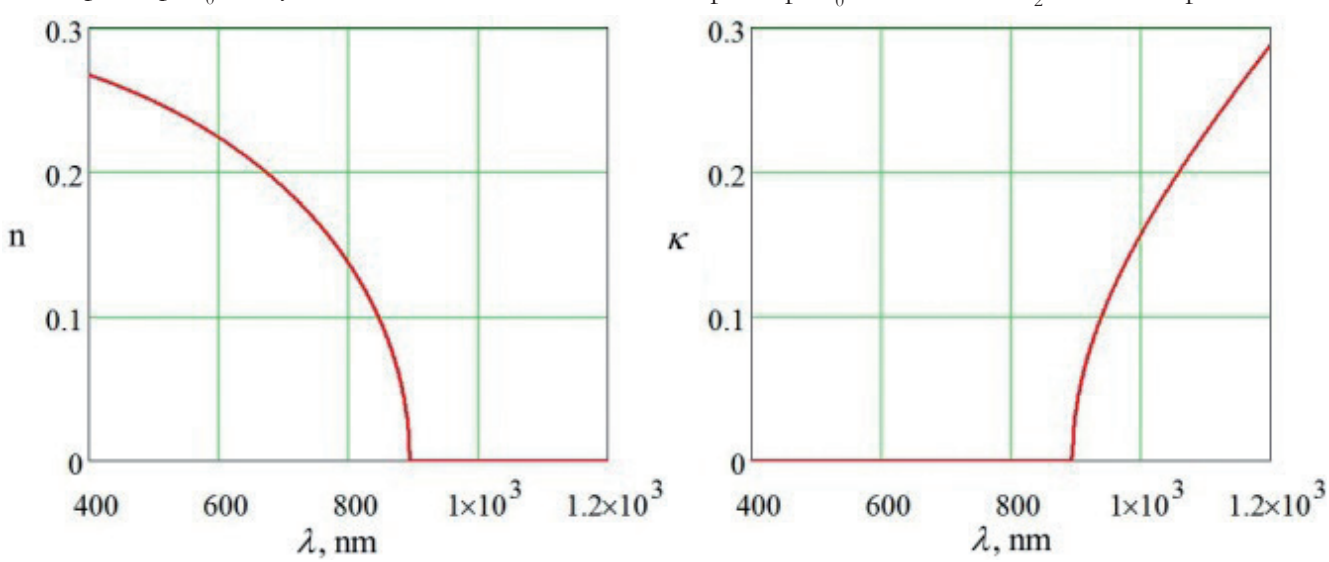


Рис. 1. *Соответствие между структурным фактором и показателем преломления метаматериала Ag@PMMA.*

$$s_0=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}\left(\alpha_{eff}\right)}+\frac{8\pi}{3}\right). \qquad (14)$$

Это означает, что при достижении такого значения s_0 из области допустимых значений, показатель преломления композита обращается в нуль. При других значениях s_0 могут быть достигнуты близкие к нулю значения n и k, при этом $n >> k$. Ниже будут представлены результаты численного моделирования возможных значений n и k композита при случайных значениях s_0.

На **Рис. 1** представлено соответствие между возможными значениями показателя преломления композита из интервала [0, Δn_2] с возможными значениями случайного параметра s_0. Значение $\Delta n_2 = 0.36$ определяется



а

Рис. 2*а*

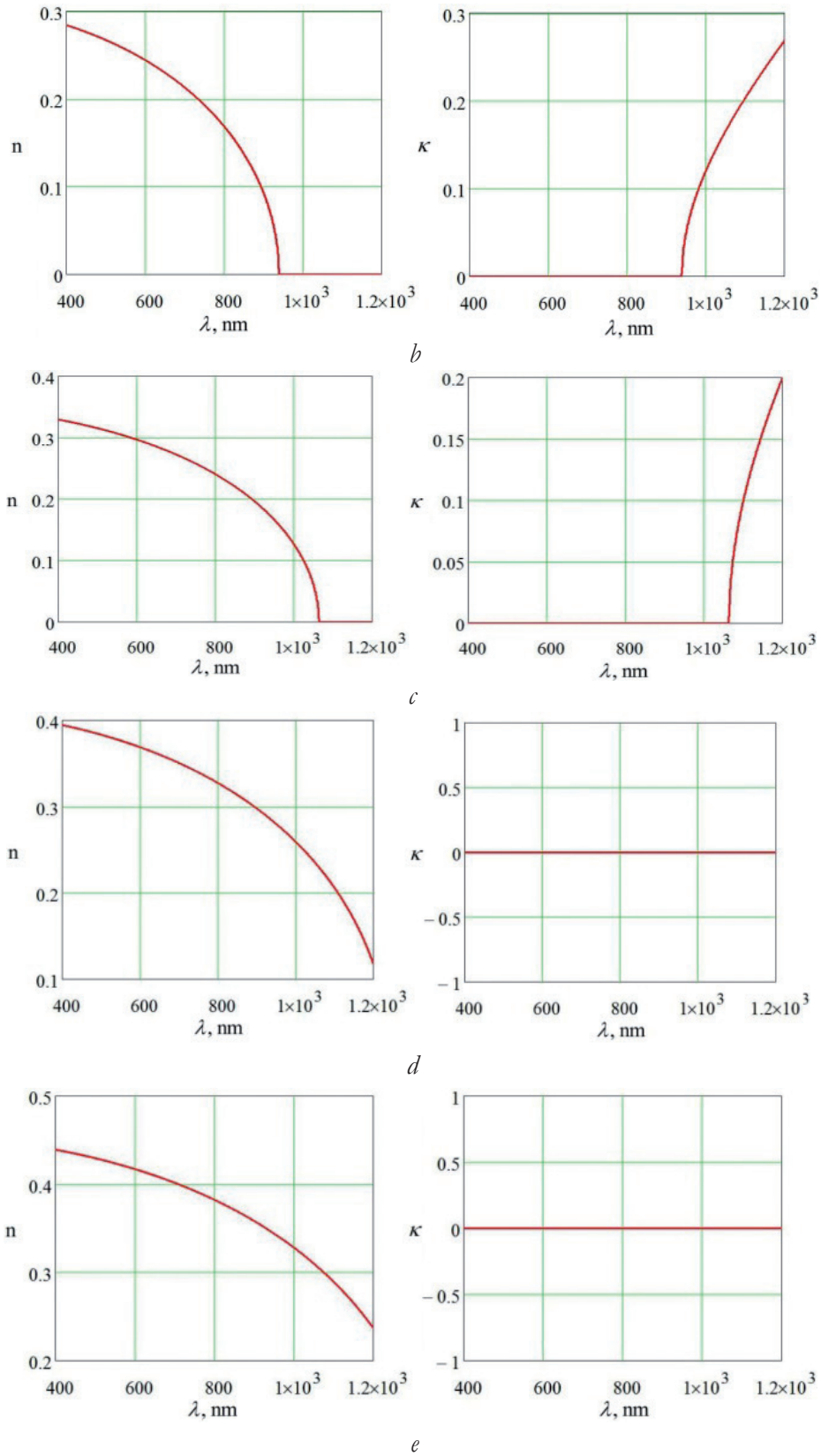


Рис. 2. *Значения n и k в зависимости от структурного фактора и длины волны. Радиус наночастиц серебра a = 2.5 нм, массовое содержание серебра в полимере 3%, показатель преломления PMMA* n_m *= 1.49.* *a)*s_0 = 0.764, *b)*s_0 = 0.766, *c)*s_0 = 0.773, *d)*s_0 = 0.785, *e)*s_0 = 0.795.

по расположению интерференционных минимумов в спектрах отражения и пропускания слоя с толщиной d_2 = 3.5 мкм [7].

На **Рис. 2** представлены результаты численного моделирования показателей преломления и поглощения композита при

различных значениях структурного фактора и длины волны. Как видно из Рис. 2*a-c* при соответствующих значениях s_0 в инфракрасной области длин волн показатель поглощения композита достигает больших значений, то есть в этой области длины волны композит обладает сильным поглощением. При этом показатель преломления композита в этой области длин волн равен нулю. На Рис. 2*d,e* показано, что в широком диапазоне длин волн от 400 до 1200 нм показатель поглощения обращается в нуль. При этом показатель преломления композита с наночастицами серебра изменяется в диапазоне от 0.46 до 0.12 в зависимости от значения структурного фактора.

На **Рис. 3** приведены экспериментальные значения показателя преломления *n* и коэффициента оптического отражения *R* на длине волны 628 нм покрытий из метаматериала Ag@PMMA разной толщины от 5 мкм до 30 мкм на стеклянной пластине. Видно, что измеренные значения показателя преломления хорошо согласуются с расчётными. С учётом полученных экспериментальных данных из работы [7] и приведённых в данной работе на Рис. 3 можно сделать вывод о том, что в синтезированном композите с 3%-весовым содержанием серебра и толщиной от 3 мкм

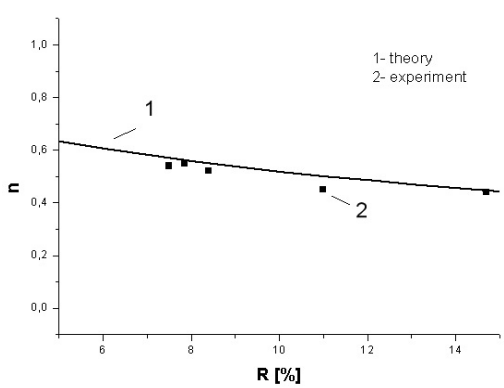


Рис. 3. *Экспериментальные значения показателя преломления n и коэффициента оптического отражения R на длине волны 628 нм метаматериала Ag@PMMA толщиной 30 мкм на стеклянной пластине.*

до 30 мкм значения параметра s_0 лежат в диапазоне от 0.79 до 0.81.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что малое весовое содержание металлических включений в композитном метаматериале способно сильно изменить оптические свойства диэлектрической матрицы. Переход к концепции дискретно-непрерывной среды позволил получить формулу для комплексного показателя преломления, которая лишь в частном случае совпадает с формулой Гарнетта. Предложена модель дискретно-непрерывной среды, в которой запаздывающая часть поля диполей в окрестности точек наблюдения отлична от нуля при любом типе симметрии в расположении наночастиц серебра в диэлектрической матрице, что является проявлением эффекта ближнего поля. Вычисление структурного фактора связано с вычислением решёточных сумм идеальной кубической решётки, в которой роль постоянной решётки выполняет среднее расстояние между центрами сферических наночастиц. При этом случайное отклонение от идеальной решётки определяется с помощью случайного параметра порядка единицы. Показано, что когда произведение структурного фактора на эффективную поляризуемость метаматериала равна единице, то возможно достижение нулевого и близких к нулю значений показателя преломления такого материала. На основании данных эксперимента с покрытиями из метаматериала Ag@PMMA разной толщины от 5 мкм до 30 мкм на стеклянной пластине проведено их сопоставление с расчётными данными, которое показало хорошее соответствие эксперимента и теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гадомский ОН, Ушаков НМ. Нанокомпозиционное просветляющее покрытие в виде толстой пленки и способ его получения. *Патент РФ №2456710 от 20.07.2012.*
2. Катнов ВЕ, Гадомский ОН, Степин СН, Катнова РР. Способ получения просветляющего покрытия. *Патент РФ № 2554608 от 27.06.2015.*

3. Виноградов АП, Дорофеенко АП, Зухди С. К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов. *Успехи Физических Наук,* 2008, 178(5):511-518.
4. Moiseev SG. Optical properties of a Maxwell–Garnett composite medium with nonspherical silver inclusions. *Russian Physics Journal*, 2009, 52(11):1121-1127. DOI: 10.1007/s11182-010-9349-6.
5. Гадомский ОН. Проблема двух электронов и нелокальные уравнения электродинамики. *Успехи Физических Наук*, 2000, 170(11):1145-1181. DOI: 10.3367/UFNr.0170.200011a.1145.
6. Гадомский ОН, Кадочкин АС. Микроскопическая теория квазикристаллического переходного слоя на поверхности жидких диэлектриков при брюстеровском отражении света и эффект ближнего поля. *Оптика и Спектроскопия,* 2003, 94(3):504-512.
7. Гадомский ОН, Степин СН, Катнов ВЕ. Наноструктурные композитные слои с квазинулевым показателем преломления. *Журнал Прикладной Спектроскопии*, 2013, 80(5):738-742.
8. Gadomsky ON, Stepin SN, Ushakov NM. Enhancement and fokusing of light in nanostructured quasi-zero-refractive index films. *Optics communications,* 2014, 330:99-105.
9. Гадомский ОН, Гадомская ИВ. Незеркальное отражение света на неоднородной границе раздела двух сред и в наноструктурном слое с близким к нулю показателем преломления. ЖЭТФ, 2015, 147(2):195-211.
10. Гадомский ОН, Ушаков НМ, Щукарев ИА. Нарушение принципа обратимости световых потоков в оптической среде со случайным близким к нулю показателем преломления. ЖЭТФ, 2017, 125:564-571.
11. Gadomsky ON, Ushakov NM, Gadomskaya IV. Photon localization in optical metamaterials with a random close to zero refractive index. Nanosystems. *RENSIT: Radioelectronics. Nanosystems. Information technologies,* 2019, 11(2):159-170. DOI: 10.17725/rensit.2019.11.177.
12. Gadomsky ON, Schukarev IA. Non-Fresnel reflection and refraction of light in quasi-zero-refractive index composite film. *Optics communications*, 2015, 348:38-42.
13. Борн М, Вольф Э. Основы оптики. М., Наука, 1973, 719 с.
14. Jonson PB, Christy RW. Optical Constants of the Noble Metals. *Phys.Rev. B*, 1972, 6:4370-4392. DOI: 10.1103/PHYSREVB.6.4370.
15. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. М., Мир, 1966, 415 с.

Гадомский Олег Николаевич
доктор физ-мат. наук, профессор
Ульяновский государственный университет
42, ул. Л. Толстого, Ульяновск 432017, Россия
E-mail: gadomsky@mail.ru

Ушаков Николай Михайлович
доктор физ-мат. наук, профессор
СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
38, ул. Зелёная, Саратов 410019, Россия
E-mail: nmu@bk.ru

Гадомская Ирина Вениаминовна
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Ульяновский государственный университет
42, ул. Л. Толстого, Ульяновск 432017, Россия
E-mail: gadomskaya@mail.ru

Мусич Дмитрий Олегович
магистрант
Ульяновский государственный университет
42, ул. Л. Толстого, Ульяновск 432017, Россия
E-mail: musich@mail.ru.