

DOI: 10.17725/rensit.2023.15.433

## Определение границ геологических слоёв методом миграции в обратном времени

<sup>1</sup>Шевченко А.В., <sup>1</sup>Голубев В.И., <sup>2</sup>Екименко А.В.

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт, <https://mipt.ru/>

Долгопрудный 141700, Московская обл., Российская Федерация

<sup>2</sup>Газпромнефть НТЦ, <https://ntc.gazprom-neft.ru/>

Санкт-Петербург 190000, Российская Федерация

E-mail: [alexshevchenko@phystech.edu](mailto:alexshevchenko@phystech.edu), [golubev.vi@mipt.ru](mailto:golubev.vi@mipt.ru), [ekimenko.av@gazpromneft-ntc.ru](mailto:ekimenko.av@gazpromneft-ntc.ru)

Поступила 16.10.2023, рецензирована 23.10.2023, принята 30.10.2023, опубликована 06.12.2023.

Представлена действительным членом РАЕН И.Б. Петровым

**Аннотация:** Статья посвящена решению важной практической задачи – определение структуры подповерхностного пространства геологической среды по данным наземных сейсмических исследований. Благодаря регистрации отражённых от границ геологических слоёв сейсмических волн, возможно оконтуривание залежей углеводородов, что позволяет эффективно планировать схему разработки месторождения. Оптимизация процесса добычи позволяет сделать его рентабельным, в том числе при разработке нетрадиционных месторождений углеводородов. В работе рассмотрена технология построения миграционного изображения с помощью метода миграции в обратном времени. В общем случае проведён аналитический вывод расчётных формул. Для практически значимого случая акустической среды в явном виде выписаны упрощённые расчётные формулы, проведена их реализация в виде программного алгоритма. Отдельно обсуждается вопрос повышения качества миграционного изображения без существенного увеличения вычислительной сложности задачи. Авторами продемонстрирована работоспособность данного подхода на широко используемой геологической модели Marmousi.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, сейсмическая разведка, миграция в обратном времени.

УДК 004.94

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда № 21-11-00139.

**Для цитирования:** Шевченко А.В., Голубев В.И., Екименко А.В. Определение границ геологических слоёв методом миграции в обратном времени. РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии, 2023, 15(4):433-440. DOI: 10.17725/rensit.2023.15.433.

## Localization of the geological layer boundaries using the reverse time migration method

Alexey V. Shevchenko, Vasily I. Golubev

Moscow Institute of Physics and Technology, <https://mipt.ru/>

Dolgoprudny 141700, Moscow region, Russian Federation

E-mail: [alexshevchenko@phystech.edu](mailto:alexshevchenko@phystech.edu), [golubev.vi@mipt.ru](mailto:golubev.vi@mipt.ru)

Anton V. Ekimenko

Gazpromneft's Research and Development Center, <https://ntc.gazprom-neft.com/>

St Petersburg 190000, Russian Federation

E-mail: [ekimenko.av@gazpromneft-ntc.ru](mailto:ekimenko.av@gazpromneft-ntc.ru)

Received October 16, 2023, peer-reviewed October 23, 2023, accepted October 30, 2023, published December 06, 2023.

**Abstract:** The article is devoted to solving an important practical problem - determining the structure of the subsurface space of the geological environment based on surface seismic data. Thanks to the registration of seismic waves reflected from the boundaries of geological layers, it is possible

to delineate hydrocarbon deposits, which makes it possible to effectively plan a field development scheme. Optimizing the production process makes it possible to make it profitable, including when developing unconventional hydrocarbon deposits. The paper discusses the technology of constructing a migration image using the reverse time migration method. In the general case, an analytical derivation of the calculation formulas was carried out. For the practically significant case of an acoustic environment, simplified calculation formulas are explicitly written out and implemented in the form of a software algorithm. The issue of improving the quality of the migration image without significantly increasing the computational complexity of the problem is discussed separately. The authors demonstrated the performance of this approach using the widely used Marmousi geological model.

*Keywords:* mathematical modeling, seismic survey, reverse-time migration

UDC 004.94

*Acknowledgments:* The work was carried out within the framework of the Russian Science Foundation project No. 21-11-00139.

*For citation:* Alexey V. Shevchenko, Vasily I. Golubev, Anton V. Ekimenko. Determination of the boundaries of geological layers using the reverse time migration method. *RENSIT: Radioelectronics. Nanosystems. Information Technologies*, 2023, 15(4):433-440e. DOI: 10.17725/rensit.2023.15.433.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ (434)
  2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ (435)
    - 2.1. ОСНОВНАЯ ИДЕЯ МЕТОДА RTM (435)
    - 2.2. МЕТОД RTM В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ (436)
    - 2.3. АКУСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ (437)
    - 2.4. ПОСТ-ОБРАБОТКА ГРАДИЕНТА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МИГРАЦИОННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ (438)
  3. РЕЗУЛЬТАТЫ (438)
  4. ВЫВОДЫ (439)
- ЛИТЕРАТУРА (439)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Сейсморазведка является основным методом детального изучения строения геологического массива. Большая часть работ выполняется по методу отражённых волн в модификации общей глубинной точки (ОГТ). Получаемые в результате таких работ сейсмические разрезы интерпретируются геологами. На основе сейсмических разрезов ими выполняется построение геологических моделей, оценка ресурсной базы полезных ископаемых.

Сейсмические разрезы ОГТ обладают рядом недостатков: дифрагированные волны, связанные с разломами и малоразмерными объектами, отображаются в виде дифракционных гипербола, наклонные границы отображаются не в истинном положении, синклинальные структуры отображаются петлями. В тех случаях, когда в геологическом разрезе есть скоростные аномалии, нижележащие отражающие горизонты хуже фокусируются, а их рельеф искажается. Процедура миграции сейсмических данных направлена на минимизацию указанных недостатков и построение достоверного сейсмического изображения.

Одним из передовых методов миграции является метод миграции в обратном времени – Reverse-Time Migration (RTM). Основы этого метода были заложены в фундаментальных работах [1-3]. В дальнейшем метод был развит и обобщён на более сложные модели сред с использованием различных параметризаций, интегральных формул и техник пост-обработки различными исследователями [4-8].

В данной статье представлен успешный опыт применения метода RTM для построения миграционного изображения сложно построенной геологической среды в двумерной постановке. В общем случае изложен подробный вывод основополагающих формул, а также способ их редуцирования на частный случай акустической среды. Результаты работы содержат описание проведённых компьютерных экспериментов и построенные миграционные изображения.

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

2.1. Основная идея метода RTM

Пусть в результате проведения сейсморазведки были зарегистрированы данные  $D = \bar{D}(t)$ : сигнал на приёмниках в точках  $\vec{x}_i$ , зависящий от времени. Обозначив волновое поле (вообще говоря, неизвестное) во всём геологическом массиве через  $u$ , можно записать, что  $D = Ru$ , где  $R$  – оператор сужения (в англоязычной литературе restriction operator). При этом  $u \in U$ , где  $U$  – пространство допустимых функций координат и времени. Пусть физико-математическая модель среды описывается дифференциальным уравнением

$$F[m]u = f, \tag{1}$$

где  $f$  – известная правая часть,  $m \in M$  – параметры среды из некоего пространства допустимых параметров  $M$ ,  $F[m]$  – дифференциальный оператор, действующий на функции из пространства  $U$ . Дифференциальная задача на основе уравнения (1) является корректной по Адамару при задании подходящих начальных и граничных условий. Можем считать, что эти условия входят в определение пространства  $U$ .

Тогда можно выписать следующую функцию невязки:

$$\begin{aligned} \Psi(m) &= \frac{1}{2} \left\| (Ru)(t) - \bar{D}(t) \right\|_{R^n(t)}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left\| (\overline{Ru})(t) - \bar{D}(t) \right\|_{R^n}^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \int_0^T \left( (\overline{Ru})(t) - \bar{D}(t) \right)_i^2 dt. \end{aligned} \tag{2}$$

В данной формуле волновое поле  $u$  является единственным решением уравнения (1), следовательно,  $u = u[m]$  и  $\Psi = \Psi[m]$ .

Выпишем определения нескольких понятий, используемых далее в статье.

Производной Фреше функционала  $A$ , действующего из нормированного пространства  $E$  в  $R^1$  ( $A: E \rightarrow R^1$ ) в точке  $x_0 \in E$  называется линейный функционал

$$\left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{x_0} : E \rightarrow R^1 \left( \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{x_0} (\tilde{x}) = y, \tilde{x} \in E, y \in R \right)$$

такой, что

$$A(x) - A(x_0) = \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) + \alpha(x) \|x - x_0\|, \tag{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Также в дальнейшем будет использовано определение сопряжённого оператора  $A^*$  к оператору  $A$  для пространств со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle. \tag{4}$$

Распределение параметров среды  $m_* = \operatorname{argmin} \Psi[m]$  можно считать решением обратной задачи нахождения параметров среды  $m$  по известному уравнению (1), известной правой части  $f$  и известным зарегистрированным данным  $D$ . Для поиска  $m_*$  можно применять различные методы оптимизации, например, часто используются градиентные методы с использованием производных в смысле Фреше (3). Было замечено, что, если начальное приближённое распределение параметров является сглаженной версией истинного (это часто бывает так в силу оценки среднего значения скорости), то искомое приращение параметров среды  $m_* - m_{\text{initial}}$  соответствует

миграционному изображению среды. На основе этого наблюдения был предложен метод RTM, заключающийся в нахождении градиента  $\partial\Psi/\partial m$  и его последующей обработке для получения миграционного изображения.

**2.2. МЕТОД RTM В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ**

В данном подразделе рассмотрим способ нахождения производной  $\partial\Psi/\partial m$ . Прямое дифференцирование функционала невязки (2) по параметрам среды  $m$  потребует нахождения производных  $\partial(Ru)/\partial m$ , что в дискретном случае соответствует матрице Якоби первых производных  $\left\| \frac{\partial(Ru)}{\partial m_j} \right\|$ , вычисление которой чрезвычайно затратно. Поэтому для расчёта производной  $\partial\Psi/\partial m$  используется техника решения сопряжённого уравнения, не требующая явного вычисления  $\partial(Ru)/\partial m$ . Вывод соответствующих формул может быть проведён несколькими способами [5]. Нами был выбран метод множителей Лагранжа для задачи непрерывной оптимизации с ограничениями, представленный ниже.

Для оптимизации функционала невязки  $\frac{1}{2}\|(Ru)(t) - \bar{D}(t)\|_{R^n(t)}^2$  при дополнительном ограничении  $F[m]u = f$  рассмотрим функционал Лагранжа

$$L[m, \tilde{u}, \tilde{\lambda}] = \frac{1}{2}\|(R\tilde{u})(t) - \bar{D}(t)\|_{R^n(t)}^2 + \langle \tilde{\lambda}, F[m]\tilde{u} - f \rangle \tag{5}$$

с произвольными  $m \in M$ ,  $\tilde{u} \in U$ ,  $\tilde{\lambda} \in U^*$ , где пространство  $U^*$  определяет функции такой же гладкости, как и в пространстве  $U$ , с теми же граничными условиями, но с условиями в конечный момент времени вместо начальных условий. Из теории оптимизации известно, что минимум функционала достигается в точке, где производные Лагранжиана равны нулю [9]. Сначала выпишем дифференциалы Фреше функционала  $L$  по  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\lambda}$ , используя определение сопряжённого оператора (4):

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{\lambda}} \Big|_{m, \tilde{u}, \tilde{\lambda}} (\tilde{\lambda}) = 0 + \langle \tilde{\lambda}, F[m]u - f \rangle, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \tilde{u}} \Big|_{m, \tilde{u}, \tilde{\lambda}} (\tilde{u}) &= \langle R\tilde{u} + D, R\hat{u} \rangle + \langle F[m]^* \lambda, \hat{u} \rangle = \\ &= \langle R^*(R\tilde{u}) + D \rangle + F[m]^* \lambda, \hat{u}. \end{aligned} \tag{7}$$

Приравнивая производные выше к нулю, мы получим прямую задачу относительно  $u$  и сопряжённую задачу относительно  $\lambda$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{\lambda}} = 0 \Leftrightarrow F[m]u - f = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{u}} = 0 \Leftrightarrow R^*(R\tilde{u} + D) + F[m]^* \lambda = 0. \tag{9}$$

Уравнение (8) представляет собой прямую задачу, решаемую каким-либо численным методом. Для задач сейсмологии было разработано множество различных подходов, например, [10-12]. Уравнение (9) представляет собой сопряжённую задачу относительно  $\lambda$ , также решаемую численно. В следующем разделе будет показано, что для акустической модели оператор  $F$  и сопряжённый к нему  $F^*$  таковы, что для решения сопряжённой задачи возможно применение того же решателя, что и для прямой задачи.

Теперь рассмотрим дифференциал Фреше  $L$  по параметрам среды  $m$  в предположении линейности слагаемых оператора  $F$  по  $m$  ( $\tilde{u}$ ,  $\tilde{\lambda}$ , не зависят от  $m$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial m} \Big|_{m, \tilde{u}, \tilde{\lambda}} (\hat{m}) &= \frac{\partial}{\partial m} \langle \tilde{\lambda}, F[m]u \rangle \Big|_{m, \tilde{u}, \tilde{\lambda}} (\hat{m}) = \\ &= \langle \tilde{\lambda}, F[m + \hat{m}] - F[m](u) \rangle_U = \\ &= \langle I(\bar{x}), \hat{m} \rangle_M. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, производной функционала по параметрам  $m$  является интегральный оператор на пространстве  $M$  с ядром  $I$ :

$$\langle I(\bar{x}), \hat{m} \rangle_M = \int_{\Omega} \int_0^T \lambda \cdot (F[m + \hat{m}] - F[m])u dt d\bar{x}. \tag{11}$$



Ядро  $I = I(\bar{x})$  определяет интегральный оператор, задающий производную Фреше, поэтому  $I$  обычно называют градиентом  $\partial\Psi/\partial m$ . Это ядро и является искомой производной.

Итак, алгоритм вычисления  $\partial\Psi/\partial m$  следующий:

1. Решить прямую задачу (8) – найти  $u$ .
2. Решить сопряжённую задачу (9) – найти  $\lambda$ .
3. Посчитать градиент  $I = I(\bar{x})$  по формуле интеграла (11) по рассчитанным  $u$  и  $\lambda$ .

### 2.3. АКУСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В данной работе для описания распространения сейсмических волн в геологической среде использовались уравнения акустики. Эта модель корректно описывает распространение продольных волн, их многократное прохождение и отражение на границах раздела слоёв. Математически модель можно записать в виде скалярного волнового уравнения

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + f. \tag{12}$$

В данном уравнении  $u = u(\bar{x}, t)$  – отклонение давления в среде от равновесного;  $c = c(\bar{x}) > 0$  – скорость распространения продольных волн,  $\Delta$  – оператор Лапласа. Таким образом, оператор  $F$  может быть записан в виде

$$F[m] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{13}$$

Задача рассматривается с нулевыми начальными условиями, поскольку до начала проведения сейсморазведки среда находилась в состоянии покоя. На единственной физической границе – дневной поверхности – ставится нулевое граничное условие. Таким образом, можно определить пространства  $\mathcal{U}, \mathcal{U}^*$ :

$$\mathcal{U} = \{f \in C^2 : f|_{t=0} = 0, f_{|_{t=T}} = 0, f|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0\}, \tag{14}$$

$$\mathcal{U}^* = \{f \in C^2 : f|_{t=T} = 0, f_{|_{t=0}} = 0, f|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0\}, \tag{15}$$

Отсюда можно получить условие самосопряжённости  $F = F^*$ :

$$\forall u \in \mathcal{U} \ \forall \lambda \in \mathcal{U}^* \rightarrow \langle F[m]u, \lambda \rangle_{L_2} = \langle u, F[m]\lambda \rangle_{L_2}. \tag{16}$$

Оператор сужения  $R$  представляет собой взятие значений в точках  $\bar{x}_i$ , а сопряжённый к нему  $R^*$  – оператор, приводящий временной сигнал в наборе точек к сумме дельта-функций по координате в этом наборе точек. Таким образом, правая часть сопряжённого уравнения (9)  $-R^*(Ru - D)$  есть сумма точечных источников, расположенных в местоположениях приёмников данных  $D$ .

Для вычисления  $I$  по формуле (11) остаётся представить в явном виде выражение  $(F[m + \hat{m}] - F[m])u$ . При этом  $\hat{m}$  в итоговую формулу не войдёт, будучи перенесённым в другой множитель скалярного произведения согласно формуле (10). Считая параметром  $m$  квадрат скорости, из (13) получаем

$$(F[m + \hat{m}] - F[m])u = \hat{c}^2 \Delta u, \tag{17}$$

$$I(\bar{x}) = \int_0^T \lambda \cdot \Delta u \, dt. \tag{18}$$

Однако необходимо отметить, что для других параметризаций рассматриваемой модели результат будет иным. Например, считая параметром среды медленность  $\beta = 1/c^2$ , можно записать  $F_1 = \beta u_{tt} - \Delta u$ , из чего следует  $(F_1[m + \hat{m}] - F_1[m])u = \beta u_{tt}$  и формула

$$I_1(\bar{x}) = \int_0^T \lambda \cdot u_{tt} \, dt. \tag{19}$$

Последняя формула с учётом нулевых начальных условий на  $u$  и конечных условий на  $\lambda$  по правилу интегрирования по частям легко переписывается в виде

$$I_1(\bar{x}) = \int_0^T \lambda \cdot u_{tt} \, dt = - \int_0^T \lambda_t \cdot u_t \, dt = \int_0^T \lambda_{tt} \cdot u \, dt. \tag{20}$$

В данной работе мы использовали широко применяемую на практике упрощённую формулу

$$I(\bar{x}) = \int_0^T \lambda \cdot u \, dt. \quad (21)$$

#### 2.4. ПОСТ-ОБРАБОТКА ГРАДИЕНТА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МИГРАЦИОННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Для части реальных задач получаемый градиент  $\partial\Psi/\partial m$  достаточно далёк от желаемого миграционного изображения. Существует несколько подходов к улучшению результата. Например, в Least-Squares RTM выполняется процедура градиентного спуска для достижения  $dm \approx m_* - m_{\text{initial}}$ , однако этот метод требует больших вычислительных ресурсов. В данной работе мы использовали несколько более простых техник, позволяющих за малое вычислительное время заметно улучшить итоговое миграционное изображение.

Первым таким методом является компенсация затухания сейсмического сигнала. Известно, что амплитуда волн уменьшается в связи с геометрическим расхождением даже в модели геологической среды без диссипации. Следовательно, амплитуда градиента, получаемого при помощи интеграла (21), затухает с глубиной, потому что источники и прямой, и сопряжённой задач расположены вблизи поверхности. Для компенсации этого эффекта было предложено заменить интегральную формулу (21) на следующую:

$$\text{Image}(\bar{x}) = \frac{\sum_{s:\text{sources}} \int_0^T u_s \lambda_s \, dt}{\sum_{s:\text{sources}} \int_0^T u_s^2 \, dt + \delta}. \quad (22)$$

Неотрицательный знаменатель отделяется от нуля при помощи малой константы  $\delta$ . Также в эту формулу мы явно добавили суммирование по всем источникам: для каждого источника есть свой набор данных  $D$  и проводится свой расчёт прямой и сопряжённой задачи.

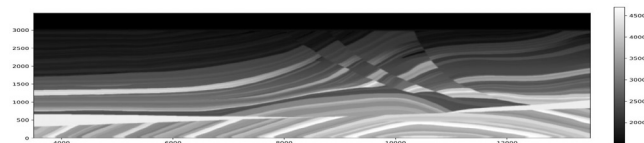
Для подавления низкочастотных компонентов шума на полученном изображении применяется стандартный фильтр Лапласа.

Поскольку амплитуды  $I(\bar{x})$  в непосредственной близости от источников и приёмников крайне велики, но не представляют значительного интереса, при отображении  $I$  для визуального анализа значения вблизи поверхности (до глубин порядка 100 м) зануляются.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Описанный в работе вычислительный алгоритм был реализован авторами в виде компьютерной программы на языке Python. Для численного решения определяющих уравнений прямой и сопряжённой задач использовался решатель с открытым исходным кодом SpecFem2D, основанный на методе спектральных элементов [13]. В качестве базиса для разложения решения использовались элементы 4-го порядка. Вблизи боковых и нижней границ дополнительно использовались поглощающие PML-слои [14]. В процессе моделирования рассчитанные поля давлений сохранялись на жёсткий диск, после чего использовались для расчёта интеграла по формуле (22).

Рассматривалась двумерная постановка задачи с широко используемой тестовой геологической моделью Marmousi [15] в монопараметрической акустической постановке (13). На **Рис. 1** представлено распределение скоростей в истинной модели среды. Для построения модели начального приближения данное распределение было сглажено при помощи функции `gaussian_filter` библиотеки `SciPy.ndimage`. Для наглядности разность между начальным приближением и



**Рис. 1.** Распределение скорости продольных волн в модели Marmousi.

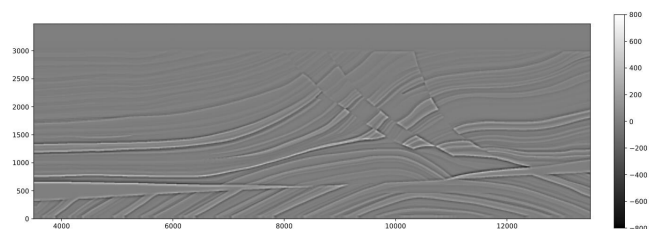


Рис. 2. Разница в параметрах истинной модели и использованного начального приближения.

истинным распределением ( $m_* - m_{\text{initial}}$ ) представлена на Рис. 2.

При проведении компьютерных расчётов использовалась квадратная расчётная сетка с шагом 20 м, покрывающая геологическую модель размерами 10×3.5 км. Общее время компьютерного эксперимента составляло 3.5 с, шаг по времени выбирался равным  $3.5 \cdot 10^{-4}$  с. В качестве функции источника использовался импульс Рикера с пиковой частотой 25 Гц. На дневной поверхности данные регистрировались 491 приёмником, расположенными равномерно с шагом 20 м на глубине 10 м. Для построения миграционного изображения использовался 61 источник с шагом 150 м на глубине 10 м. На Рис. 3 представлен результат работы метода RTM.

#### 4. ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена обратная задача сейсмической разведки – определение положения границ раздела геологических

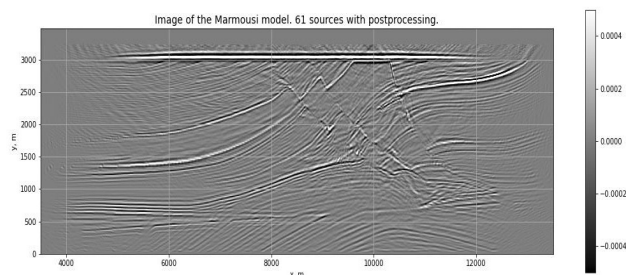


Рис. 3. Рассчитанное миграционное изображение.

слоёв. Представлен вывод расчётного алгоритма для проведения процедуры миграции сейсмических данных в обратном времени в общем случае. Получены упрощённые расчётные формулы для акустической модели геологической среды. Проведена реализация вычислительного алгоритма в виде компьютерной программы, использованной для решения задачи с тестовой моделью Marmousi. Анализ полученного миграционного изображения подтверждает возможность локализации отражающих горизонтов и подавления шумов.

Дальнейшим продолжением исследований авторы видят обобщение рассмотренного подхода на более сложные модели геологических сред, например, изотропные и анизотропные линейно упругие модели.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lailly P. The Seismic Inverse Problem as a Sequence of before Stack Migrations. In: Bednar JB, Robinson E, Weglein A. (eds.). *Conference on Inverse Scattering – Theory and Application*, SIAM, Philadelphia, 1983, pp. 206-220.
2. Tarantola A. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 1984, 49:1259-1266.
3. Baysal E, Kosloff DD, Sherwood JWC. Reverse time migration. *Geophysics*, 1983, 48:1514-1524.
4. Plessix RE, Mulder WA. Frequency-domain finite-difference amplitude-preserving migration. *Geophys. J. Int.*, 2004, 157:975-987.
5. Plessix RE. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophys. J. Int.*, 2006, 167(2):495-502.
6. Yang J, Liu Y, Dong L. Least-squares reverse time migration in the presence of density variations. *Geophysics*, 2016, 81(6):497-509.

7. Sun M, Dong L, Yang J, Huang C, Liu Y. Elastic least-squares reverse-time migration with density variations. *Geophysics*, 2018, 83(6):1-62.
8. Маловичко МС, Шевченко АВ, Голубев ВИ. On imaging conditions for elastic reverse-time migration. *Conference Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications (QIPA)*, 2022.
9. Ciarlet PG. *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimization*. Cambridge University Press, New York, 1989.
10. Virieux J, Calandra H, Plessix RE. A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging. *Geophysical Prospecting*, 2011, 59(5):794-813.
11. Golubev V, Shevchenko AV, Petrov I. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting. *Computer Research and Modeling*, 2022, 14(4):899-910.
12. Golubev V, Shevchenko A, Khokhlov N, Petrov I, Malovichko M. Compact Grid-Characteristic Scheme for the Acoustic System with the Piece-Wise Constant Coefficients. *International Journal of Applied Mechanics*, 2022, 14(02). DOI: 10.1142/S1758825122500028.
13. Peter D, Komatitsch D, Luo Y, Martin R et al. Forward and Adjoint Simulations of Seismic Wave Propagation on Fully Unstructured Hexahedral Meshes. *Geophys. J. Int.*, 2011, 186(2):721-39. DOI: 10.1111/J.1365-246X.2011.05044.X
14. Zhinan X, Komatitsch D, Martin R, et al. Improved Forward Wave Propagation and Adjoint-Based Sensitivity Kernel Calculations Using a Numerically Stable Finite-Element PML. *Geophys. J. Int.*, 2014, 198(3):1714-1747.
15. Brougois A, Bourget M, Lailly P, Poulet M, Ricarte P, Versteeg R. Marmousi, model and data. *Conference: EAGE Workshop - Practical Aspects of Seismic Data Inversion*, 1990. DOI: 10.3997/2214-4609.201411190.

**Шевченко Алексей Владимирович**

научный сотрудник

Московский физико-технический институт

9, Институтский пер., Долгопрудный

141700, Московская область, Россия

E-mail: alexshevchenko@phystech.edu

**Голубев Василий Иванович**

д.ф.-м.н., доцент

Московский физико-технический институт

9, Институтский пер., Долгопрудный

141700, Московская область, Россия

E-mail: golubev.vi@mipt.ru

**Екименко Антон Валерьевич**

эксперт

Газпромнефть НТЦ

75-79, наб. р. Мойки, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ekimenko.av@gazpromneft-ntc.ru.