DOI: 10.17725/rensit.2024.16.003

Физически реализуемое восстановление непрерывного сигнала после дискретизации

Дегтярев А.Н., Афонин И.Л., Поляков А.Л.

Севастопольский государственный университет, http://www.sevsu.ru/

Севастополь 299053, Российская Федерация

E-mail: andegtyarev@mail.sevsu.ru, ilafonin@mail.sevsu.ru, alpolyakov@ mail.sevsu.ru

Поступила 23.08.2023, рецензирована 30.08.2023, принята 07.09.2023, опубликована 15.03.2024.

Представлена действительным членом РАЕН А.А. Потаповым

Аннотация: **Предлагается описывать сигналы в физически реализуемом базисе. В качестве базисных функций используются корреляционные функции импульсных характеристик физически реализуемых фильтров. Для получения аналитических выражений функций предлагаемого физически реализуемого базиса предлагается использовать обратные преобразования Фурье от аппроксимаций (Баттерворта, Чебышева и т.д.) квадратов амплитудно-частотных характеристик нормированных фильтров нижних частот. Функции базиса представляют собой копии указанных корреляционных функций импульсных характеристик, смещенные друг относительно друга на один и тот же интервал времени, который является интервалом дискретизации. Показано, что в пространстве введённых функций существует теорема отсчетов. Точное восстановление сигнала возможно в случае, если функции рассматриваемого базиса обладают свойством отсчётности. В этом случае рассматриваемые базисные функции представляют собой функции отсчётов и физически не реализуются. Для снижения погрешности восстановления непрерывного сигнала по его отсчётам с использованием предлагаемого базиса необходимо повышать порядок фильтра, импульсные характеристики которого используются при формировании базиса. Для восстановления непрерывного сигнала необходимо его отсчёты подавать на два каскадно соединенных фильтра. Первый фильтр должен иметь импульсную характеристику, корреляционная функция которой используется для формирования физически реализуемого базиса. Второй фильтр должен быть согласован с импульсной характеристикой первого фильтра.**

Ключевые слова: **дискретизация, теорема отсчетов, импульсная характеристика фильтра, корреляционная функция**

УДК 621.376.5

Для цитирования: Дегтярев А.Н., Афонин И.Л., Поляков А.Л. Физически реализуемое восстановление непрерывного сигнала после дискретизации. *РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии,* 2024, 16(1):3-10. DOI: 10.17725/rensit.2024.16.003.

Physically realizable reconstruction of a continuous signal after sampling

Andrey N. Degtyarev, Igor L. Afonin, Alexander L. Polyakov

Sevastopol State University, http://www.sevsu.ru/

Sevastopol 299053, Russian Federation

E-mail: andegtyarev@mail.sevsu.ru, ilafonin@mail.sevsu.ru, alpolyakov@ mail.sevsu.ru

Received August 23, 2023, peer-reviewed August 30, 2023, accepted September 07, 2023, published March 15, 2024.

Abstract: **It is proposed to describe signals in a physically realizable basis. Correlation functions of impulse characteristics of physically implemented filters are used as basic functions. To obtain analytical expressions of the functions of the proposed physically realizable basis, it is proposed to**

use inverse Fourier transforms from approximations (Butterworth, Chebyshev, etc.) of the squares of the amplitude-frequency characteristics of normalized low-pass filters. The basis, functions are copies of the indicated correlation functions of the impulse characteristics, shifted relative to each other by the same time interval, which is the sampling interval. It is shown that there is a sampling theorem in the space of the introduced functions. The exact restoration of the signal is possible if the functions of the considered basis have the property of readability. In this case, the considered basic functions are functions of counts and are not physically implemented. To reduce the error of restoring a continuous signal from its readings using the proposed basis, it is necessary to increase the order of the filter, the pulse characteristics of which are used in the formation of the basis. To restore a continuous signal, its samples must be fed to two cascaded filters. The first filter must have an impulse response, the correlation function of which is used to form a physically realizable basis. The second filter must be matched to the impulse response of the first filter.

Keywords: **sampling, sampling theorem, pulse characteristic of the filter, correlation function**

UDC 621.376.5

For citation: Andrey N. Degtyarev, Igor L. Afonin, Alexander L. Polyakov. Physically realizable reconstruction of a continuous signal after sampling. *RENSIT: Radioelectronics. Nanosystems. Information Technologies,* 2024, 16(1):3-10e. DOI: 10.17725/j.rensit.2024.16.003.

Содержание

1. ВВЕДЕНИЕ

Теорема отсчетов В.А. Котельникова позволяет представлять ограниченные по частоте сигналы в виде рядов по функциям отсчётов. Коэффициентами ряда являются отсчёты сигнала, которые берутся в моменты времени кратные интервалу дискретизации $\alpha = 1/(2f_m)$, где f_m – максимальная частота в спектре сигнала. Функции отсчётов обладают тем свойством, что когда одна из них достигает своего максимума, то другая равна нулю. Для восстановления непрерывного сигнала по его отсчётам достаточно дельта-импульсы, взвешенные отсчётами сигнала, подать на идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ). Однако идеальные ФНЧ физически не реализуются, поэтому в качестве таких ФНЧ используются фильтры Баттерворта. Импульсная характеристика фильтров Баттерворта не обладает указанным свойством функций отсчётов [1,2,3,13,14,15].

Целесообразно рассмотреть особенности дискретизации и восстановления сигналов в базисе физически реализуемых эквидистантных функций.

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Пусть эквидистантные функции $\varphi_n(t) = \varphi_0(t - n\alpha)$ ортонормированы с весом равным единице. Тогда некоторую функцию $f(t)$, спектральная плотность которой равна

$$F(\mathrm{j}\omega) = F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_f(\omega)},$$

можно разложить в ряд

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \varphi_n(t).$$

Поскольку базисные функции $\varphi_n(t)$ являются эквидистантными, то

$$\Phi_n(\mathrm{j}\omega) = \Phi_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_\varphi(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\alpha},$$

и прямое преобразование Фурье от $f(t)$ дает зависимость

$$F(\mathrm{j}\omega) = F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_f(\omega)} = \Phi_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_\varphi(\omega)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\alpha n}. \tag{1}$$

Средний квадрат ошибки аппроксимации рядом определяется как

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \varphi_n(t)]^2 \mathrm{d}t, \tag{2}$$

где

$$y_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t,$$

$$\|\varphi_n\|^2 = E_\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(t)\mathrm{d}t.$$

На основании равенства Парсеваля (2) перепишем в виде

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F(\mathrm{j}\omega) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \Phi_n(\mathrm{j}\omega)]\times$$

$$\times[\overset{*}{F}(\mathrm{j}\omega) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \overset{*}{\Phi}_n(\mathrm{j}\omega)]\mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F^2(\omega) - F(\mathrm{j}\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \overset{*}{\Phi}_n(\mathrm{j}\omega) -$$

$$-\overset{*}{F}(\mathrm{j}\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \Phi_n(\mathrm{j}\omega) +$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_n y_k \overset{*}{\Phi}_n(\mathrm{j}\omega)\Phi_k(\mathrm{j}\omega)]\mathrm{d}\omega.$$

Преобразуем полученное выражение и получим

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F^2(\omega) - F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_f(\omega)}\Phi_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_\varphi(\omega)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha} -$$

$$-F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_f(\omega)}\Phi_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_\varphi(\omega)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\alpha} +$$

$$+\Phi_0^2(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_n y_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\alpha}]\mathrm{d}\omega.$$

Будем считать, что $F(\omega) = \Phi_0(\omega)$, и получаем

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi_0^2(\omega) - \Phi_0^2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_f(\omega)-\theta_\varphi(\omega))}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha} -$$

$$-\Phi_0^2(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\theta_f(\omega)-\theta_\varphi(\omega))}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\alpha} + \Phi_0^2(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^2]\mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0^2(\omega)[1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\theta(\omega)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha} -$$

$$-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Delta\theta(\omega)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\alpha} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^2]\mathrm{d}\omega,$$

где $\Delta\theta(\omega) = \theta_f(\omega) - \theta_\varphi(\omega)$.

Поскольку коэффициенты y_n дельта-коррелированы между собой, то имеем

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0^2(\omega)[2 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\theta(\omega)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha} -$$

$$-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Delta\theta(\omega)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n\alpha}]\mathrm{d}\omega.$$

Учитывая чётность функции $\Phi_0^2(\omega)$ и нечётность функции $\Delta\theta(\omega)$, а также тот факт, что интегрирование производится по бесконечным пределам, получаем

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0^2(\omega)[2 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\theta(\omega)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha}]\mathrm{d}\omega =$$

$$= 2E_\varphi - 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0^2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\theta(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha}\mathrm{d}\omega =$$

$$= 2E_\varphi\left(1 - \frac{1}{E_\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0^2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\theta(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha}\mathrm{d}\omega\right).$$

Это же выражение можно получить на основании того, что функции $\varphi_n(t)$ являются ортогональными, не считая коэффициенты y_n дельта-коррелированными.

Для того, чтобы средний квадрат ошибки был равен нулю необходимо выполнение условия

$$\frac{1}{E_\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0^2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\theta(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha}\mathrm{d}\omega = 1,$$

что возможно, если

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0^2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\theta(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha}\mathrm{d}\omega = E_\varphi y_n. \qquad (3)$$

Рассмотрим значение коэффициента y_n

$$y_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{E_\phi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t.$$

На основании равенства Парсеваля запишем

$$y_n = \frac{1}{E_\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{E_\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_f(\omega)}\Phi_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_\varphi(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha}\mathrm{d}\omega = \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{E_\varphi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0^2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\theta(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha}\mathrm{d}\omega.$$

Из сравнения (4) и (3) становится очевидным, что равенство (3) является тождеством. Следовательно, средний квадрат ошибки аппроксимации сигнала рядом (2) равен нулю.

Выражение (4) можно переписать в виде

$$y_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{E_\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\Phi_0(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n\alpha}\mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{E_\varphi}R_{f\varphi}(n\alpha),$$

где $R_{f\varphi}(n\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_0(t - n\alpha)\mathrm{d}t$ — значения корреляционной функции сигнала $f(t)$ и функции $\varphi_0(t)$, взятые в моменты времени $n\alpha$ (n = 0, 1, 2...).

Для того чтобы определить значение α, к свойствам сигнала *f*(*t*) необходимо предъявить некоторые требования.

Так, если предположить, что сигнал *f*(*t*) ограничен по частоте максимальной частотой ω_m, то получим известную теорему дискретизации.

Действительно, поскольку сигнал представляется в виде ряда

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \varphi_0(t-n\alpha),$$

то его спектральная плотность равна (1).

Тогда можно записать

$$\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\Phi_0(\mathrm{j}\omega)}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_f(\omega)-\theta_\varphi(\omega)]}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\alpha n}. \qquad (5)$$

Выражение $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\alpha n}$ представляет собой периодическую функцию с периодом $2\pi/\alpha$.

Поскольку отношение спектральных плотностей $\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\Phi_0(\mathrm{j}\omega)}$ определено для $\omega\in[-\omega_m,\omega_m]$, то (5) возможно только если

$$\frac{2\pi}{\alpha}=2\omega_m.$$

Откуда получаем

$$\alpha=\frac{2\pi}{2\omega_m}=\frac{\pi}{2\pi f_m}=\frac{1}{2f_m}, \qquad (6)$$

что соответствует интервалу дискретизации, который вводит теорема отсчётов.

В этом случае сигнал может быть представлен рядом

$$f(t)=\frac{1}{E_\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{f\varphi}\left(\frac{n}{2f_m}\right)\varphi_0\left(t-\frac{n}{2f_m}\right). \qquad (7)$$

Если в качестве эквидистантных функций используются функции отсчётов

$$\varphi_n(t)=\frac{\sin\omega_m\left(t-\frac{n}{2f_m}\right)}{\omega_m\left(t-\frac{n}{2f_m}\right)},$$

то $E_\varphi=\pi/\omega_m$, и согласно (5) на интервале $\omega\in[-\omega_m,\omega_m]$, имеем

$$F(\mathrm{j}\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\alpha n}.$$

Коэффициенты ряда в этом случае определяются как

$$\int_{-\omega_m}^{\omega_m} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\alpha n}\mathrm{d}\omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\alpha n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\alpha n}\mathrm{d}\omega,$$
$$\int_{-\omega_m}^{\omega_m} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\pi n}{\omega_m}}\mathrm{d}\omega=y_n\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\mathrm{d}\omega. \qquad (8)$$

Поскольку

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega,\quad \int_{-\omega_m}^{\omega_m}\mathrm{d}\omega=2\omega_m,$$

то равенство (8) перепишется в виде

$$2\pi f\left(\frac{\pi n}{\omega_m}\right)=2\omega_m y_n.$$

Откуда получаем

$$y_n=\frac{\pi}{\omega_m}f\left(\frac{\pi n}{\omega_m}\right).$$

Таким образом, ограниченный по частоте сигнал раскладывается в ряд по функциям отсчётов следующим образом

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2f_m}\right)\varphi_0\left(t-\frac{n}{2f_m}\right),$$

что соответствует теореме отсчётов.

Заметим, что теорему отсчётов мы получили, исходя из общих положений аппроксимации функций рядами по эквидистантным функциям. Предположения, которые непосредственно привели к теореме отсчётов, состояли в том, что во-первых, сигнал должен быть ограничен по частоте и, во-вторых, в качестве эквидистантных функций используются функции отсчётов [4,5,6,7].

Итак, в общем случае сигнал, разложенный в ряд по эквидистантным функциям, может быть записан в виде

$$f(t)=\frac{1}{E_\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{f\varphi}(n\alpha)\varphi_0(t-n\alpha).$$

Целесообразно определить зависимость коэффициентов ряда от отсчётов сигнала.

Возьмем *m*-й отсчёт этого сигнала

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-m\alpha)\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{1}{E_\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{f\varphi}(n\alpha)\varphi_0(t-n\alpha)\delta(t-m\alpha)\mathrm{d}t.$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получаем

$$f(m\alpha)=\frac{1}{E_\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_{f\varphi}\left(n\alpha\right)\varphi_0[(m-n)\alpha]. \qquad (9)$$

Т.е. m-й отсчёт сигнала $f(t)$ вычисляется через значения взаимной корреляционной функции сигнала $f(t)$ и функции $\varphi_0(t)$ достаточно сложно (9), с помощью дискретного фильтра с импульсной характеристикой $\varphi_0(m\alpha)$.

Рассмотрим, какие требования могут быть предъявлены к функции $\varphi_0(t)$ для упрощения практического определения m-го отсчёта сигнала $f(t)$.

Поскольку $R_{f\varphi}(n\alpha)$ являются отсчётами корреляционной функции сигнала $f(t)$ и функции $\varphi_0(t)$, то можно записать

$$R_{f\varphi}\left(n\alpha\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\alpha)\varphi_0[(k-n)\alpha].$$

Имеем

$$f(m\alpha)=$$
$$=\frac{1}{E_\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\alpha)\varphi_0[(k-n)\alpha]\varphi_0[(m-n)\alpha].$$

Введем замену $l = k - n$ ($n = k - l$) и получим

$$f(m\alpha)=\frac{1}{E_\varphi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\alpha)\varphi_0[l\alpha]\varphi_0[(l+m-k)\alpha]=$$
$$=\frac{1}{E_\varphi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\alpha)\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_0[l\alpha]\varphi_0[(l+m-k)\alpha].$$

Учтём, что

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_0[l\alpha]\varphi_0[(l+m-k)\alpha]=R_\varphi[(m-k)\alpha],$$

где $R_\varphi[(m-k)\alpha]$ — отсчёты корреляционной функции элементарного сигнала $\varphi_0(t)$, взятые в моменты времени $(m-k)\alpha$, и будем иметь

$$f(m\alpha)=\frac{1}{E_\varphi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\alpha)R_\varphi[(m-k)\alpha]. \qquad (10)$$

Введём замену $n = m - k$ ($k = m - n$) и тогда

$$f(m\alpha)=\frac{1}{E_\varphi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f[(m-n)\alpha]R_\varphi(n\alpha). \qquad (11)$$

Для того, чтобы это равенство было тождеством, необходимо, чтобы при всех $n \neq 0$ отсчёты корреляционной функции $R_\varphi(n\alpha) = 0$.

Используя сформулированное требование к корреляционной функции $R_\varphi(n\alpha)$, преобразовываем правую часть равенства (11)

$$\frac{1}{E_\varphi}f(m\alpha)R_\varphi(0)=\frac{1}{E_\varphi}f(m\alpha)E_\varphi=f(m\alpha)$$

и заключаем, что (11) является тождеством.

Заметим, что с точки зрения линейных преобразований равенство (11) представляет собой линейное дискретное преобразование с воспроизводящим ядром. Ядром преобразования является выражение $R_\varphi[(m-k)\alpha]$.

Выражение (11) даёт основание считать, что ряд, коэффициентами которого являются отсчёты сигнала, должен быть построен только с применением функций, которые имеют характер эквидистантно смещенных корреляционных функций импульсных характеристик линейных систем:

$$f(t)=\frac{1}{E_\varphi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\alpha)R_\varphi(t-k\alpha). \qquad (12)$$

Отметим, что это выражение согласуется с теоремой отсчётов. Действительно корреляционная функция функции

$$\varphi_0(t)=\frac{\sin\omega_m t}{\omega_m t}$$

равна

$$R_\varphi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega_m t}{\omega_m t}\frac{\sin\omega_m(t-\tau)}{\omega_m(t-\tau)}\mathrm{d}t=\frac{\sin\omega_m\tau}{\omega_m\tau}. \qquad (13)$$

Подстановка (13) в (12) приводит к известной теореме отсчётов.

Будем раскладывать сигнал $f(t)$ в ряд по ортогональным функциям

$\varphi_n(t) = \varphi_0(t - n\alpha) = R_\varphi(t - n\alpha)$

таким, что $R_\varphi(0) \neq 0$ и $R_\varphi(n\alpha) = 0$, если $n\alpha \neq 0$.

Примем, что модуль спектральной плотности сигнала $f(t)$ равен модулю спектральной плотности функций $R_\varphi(t - n\alpha)$.

Имеем

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_n R_\varphi(t-n\alpha). \qquad (14)$$

Определим коэффициент ряда y_m

$$y_m=\frac{1}{E_R}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)R_\varphi(t-m\alpha)\mathrm{d}t=\frac{1}{E_R}R_{fR}(m\alpha), \qquad (15)$$

где $E_R=\int_{-\infty}^{\infty}R_\varphi^2(t-n\alpha)\mathrm{d}t$, $R_{fR}(m\alpha)$ – m-й отсчёт взаимной корреляционной функции сигнала и функции $R_\varphi(t)$.

Выражение (14) запишется в виде

$$f(t) = \frac{1}{E_R}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{fR}(n\alpha)R_\varphi(t-n\alpha).$$

Определим *m*-й отсчёт сигнала $f(t)$

$$f(m\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-m\alpha)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{E_R}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{fR}(n\alpha)R_\varphi(t-n\alpha)\delta(t-m\alpha)\mathrm{d}t.$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получаем

$$f(m\alpha) = \frac{1}{E_R}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{fR}(n\alpha)R_\varphi[(m-n)\alpha].$$

Учитывая оговоренные свойства функции $R_\varphi(t)$, получаем

$$f(m\alpha) = \frac{1}{E_R}R_{fR}(m\alpha)R_\varphi(0) = R_{fR}(m\alpha).$$

Таким образом, коэффициенты y_m представляют собой отсчёты сигнала $f(t)$, которые берутся в моменты времени кратные α, и ряд (14) можно переписать в виде

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\alpha)R_\varphi(t-n\alpha). \tag{16}$$

Вернёмся к (15). Перепишем (15) с учётом (14)

$$y_m = \frac{1}{E_R}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n R_\varphi(t-n\alpha)R_\varphi(t-m\alpha)\mathrm{d}t.$$

Замена вида $\tau = t - n\alpha$ и изменение порядка суммирования и интегрирования позволяет записать

$$f(m\alpha) = \frac{1}{E_R}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \int_{-\infty}^{\infty} R_\varphi(\tau)R_\varphi(\tau+n\alpha-m\alpha)\mathrm{d}\tau.$$

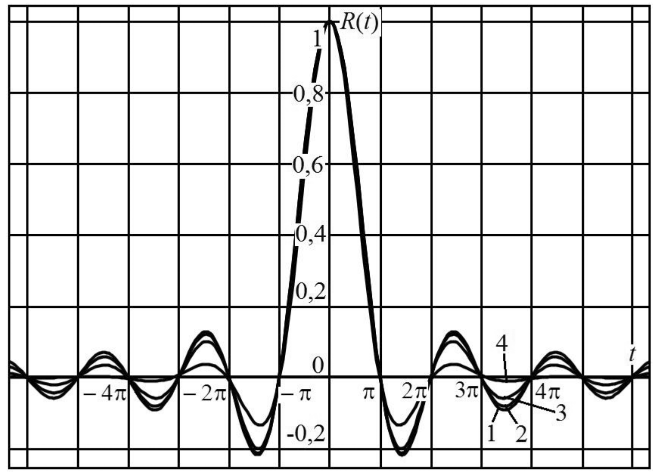
Под знаком интеграла в этом равенстве стоит значение корреляционной функции $R_{2\varphi}(t)$ функции $R_\varphi(t)$, определённое в момент времени $t = n\alpha - m\alpha$. Можно записать

$$f(m\alpha) = \frac{1}{E_R}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n R_{2\varphi}(n\alpha-m\alpha).$$

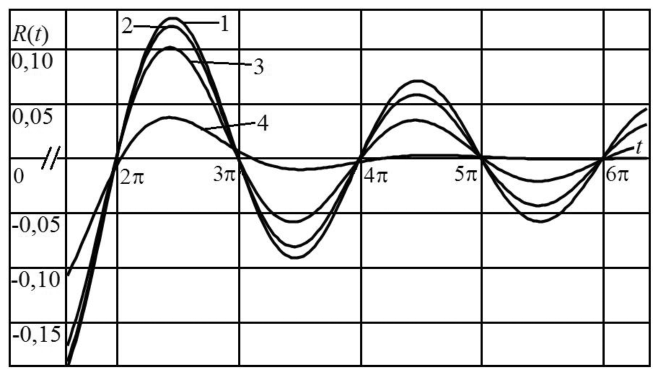
Для того, чтобы $y_m = f(m\alpha)$, на значения корреляционной функции $R_{2\varphi}(n\alpha)$ необходимо накладывать условия, аналогичные условиям, принятым для значений корреляционной функции $R_\varphi(n\alpha)$. То есть,

$$R_{2\varphi}(0) \neq 0 \ and \ R_{2\varphi}(n\alpha) = 0, \ if \ n\alpha \neq 0.$$

a



b



1 – функция sin*ct*; нормированные корреляционные функции импульсных характеристик, нормированных ФНЧ Баттерворта: 2 – 20-го порядка; 3 – 10-го порядка; 4 – 4-го порядка.

Рис. 1. *Функция sinct и нормированные корреляционные функции импульсных характеристик нормированных ФНЧ Баттерворта.*

Следует заметить, что для функций $R_{2\varphi}(t)$ и $R_\varphi(t)$, которые могут быть получены физически (например, как корреляционные функции импульсных характеристик линейных физически реализуемых систем), эти требования выполняются с определённой погрешностью (**Рис. 1**). Кроме того, система функций, получаемая путем смещения корреляционной функции $R_\varphi(t)$ на интервалы времени кратные α, не являются ортогональными. Поэтому ряд (16) приближенно описывает сигнал.

Итак, для того, чтобы приближенно восстановить сигнал по его отсчётам необходимо отсчёты подавать на два каскадно соединенных фильтра, один из которых имеет импульсную характеристику $g(t)$, а второй — согласован с этой импульсной характеристикой, причём корреляционная функция импульсной характеристики равна $R_\varphi(t)$.

Интервал смещения эквидистантных функций, по которым раскладывается сигнал (он же является интервалом дискретизации) выбирается исходя из заданной величины среднего квадрата ошибки (2) аппроксимации $f(t)$ рядом.

Кроме того, интервал смещения эквидистантных функций можно выбрать с учетом периодичности спектра дискретного сигнала. Период спектра связан с верхней учитываемой частотой спектра сигнала, т.е. с верхней учитываемой частотой среза фильтра, импульсные характеристики которого рассматриваются [10,11,12].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для того, чтобы приближенно восстановить сигнал по его отсчётам необходимо отсчёты подавать на два каскадно соединенных фильтра, один из которых имеет импульсную характеристику $g(t)$, а второй – согласован с этой импульсной характеристикой. Корреляционная функция импульсной характеристики должна иметь корреляционную функцию $R_{2\varphi}(t)$, такую, что $R_{2\varphi}(0) \neq 0$ и $R_{2\varphi}(n\alpha) = 0$, если $n\alpha \neq 0$.

Поскольку на практике реализовать фильтры с подобными импульсными характеристиками невозможно, то восстановление сигнала будет происходить с некоторой погрешностью. Снизить уровень этой погрешности можно, выбрав соответствующий порядок восстанавливающего фильтра и интервал дискретизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зюко АГ, Кловский ДД, Коржик ВИ, Назаров МВ. *Теория электрической связи.* М., Радио и связь, 1999, 432 с.
2. Кусайкин Д.В. Исследование методов восстановления дискретных сигналов с неравномерной частотой дискретизации в системах телекоммуникаций. *Сб. тезисов VII Всероссийской научно-практической конференции "Информационные технологии в мире коммуникаций"*. М., 2014, с. 153-159.
3. Кусайкин Д.В. Исследование методов восстановления частотно модулированных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке. *Сб. трудов международной научно-практической конференции "Общество, наука и инновации"*. Уфа, РИЦ БашГУ, 2013, ч. 2, с. 71-75.
4. El-Chammas M, Murmann BA. 12-GS/s 81-mW 5-bit time-interleaved flash ADC with background timing skew calibration. *Proc. Symposium on VLSI Circuits*, 2010, pp. 157-158.
5. Hormati A, Roy O, Lu YM, Vetterli M. Distributed sampling of correlated signals linked by sparse filtering: Theory and applications. *IEEE Trans. Signal Process,* 2010, 58(3):1095-1109.
6. Karthik M, Prabhu KM. On the Eigenvalues of Matrices for the Reconstruction of Missing Uniform Samples. I*EEE Transactions on signal Processing,* 2010, 58(5):2896-2900.
7. Leming Qu, Routh PS, Anno PD. Wavelet Reconstruction of Nonuniformly Sampled Signals. *IEEE signal processing letters*, 2009, 16(2):73-76.
8. Qu D, Ma B, Zhou J. Optimal Weighted Periodic Nonuniform Sampling Sequences for Digital Alias-free Signal Processing. *Proc. IEEE 10th International Conference* "*Signal Processing* (ICSP)", 2010, pp. 147-150.
9. Saleem S, Vogel C. Adaptive Blind Background Calibration of PolynomialRepresented Frequency Response Mismatches in a Two-Channel Time-Interleaved ADC. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers,* 2011, 58(6):1300-1310.
10. Senay S. Signal reconstruction from Nonuniform samples using prolate spheroidal wave functions: theory and application. *PhD thesis*. University of Pittsburgh, 2011, p. 117.
11. Senay S, Chaparro LF, Durak F. Reconstruction of nonuniformly sampled timelimited signals using prolate spheroidal wave functions. *Signal Processing,* 2009, 89(12):2585-2595.
12. Singh M, Lu C, Basu A, Mandal M. Choice of low resolution sample sets for efficient super-resolution signal reconstruction. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2012, 23(1):194-207.
13. Поршнев СВ, Кусайкин ДВ. Методы повышения точности восстановления неравномерно дискретизированных сигналов при неизвестных значениях координат узлов

временной сетки. *Вестник СибГУТИ*, 2014, 1:24-34.

14. Поршнев СВ, Кусайкин ДВ. О восстановлении неравномерно дискретизированных сигналов с неизвестными значениями координат узлов временной сетки. *Успехи современной радиоэлектроники*, 2015, 6:3-35.
15. Поршнев СВ, Кусайкин ДВ. Оценка точности алгоритмов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке с точно неизвестными значениями координат узлов. *Вестник СибГУТИ*, 2015, 1:97-108.

Дегтярёв Андрей Николаевич
к.т.н., доцент
Севастопольский государственный университет
33, ул. Университетская, Севастополь 299053, Россия
E-mail: andegtyarev@mail.sevsu.ru

Афонин Игорь Леонидович
д.т.н., профессор
Севастопольский государственный университет
33, ул. Университетская, Севастополь 299053, Россия
E-mail: ilafonin@mail.sevsu.ru

Поляков Александр Леонидович
к.т.н., доцент
Севастопольский государственный университет
33, ул. Университетская, Севастополь 299053, Россия
E-mail: alpolyakov@mail.sevsu.ru.