

DOI: 10.17725/rensit.2024.16.373

## Мультиплицирование дифракционных картин от плоских геометрических фрактальных объектов с использованием метода прореживания

Арзамасцева Г.В., Евтихов М.Г., Лисовский Ф.В.

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал, <http://fireras.su/>  
Фрязино 141120, Московская область, Российская Федерация

E-mail: [arzamastseva@mail.ru](mailto:arzamastseva@mail.ru), [emg20022002@mail.ru](mailto:emg20022002@mail.ru), [lisovsky.f@yandex.ru](mailto:lisovsky.f@yandex.ru)

Поступила 14.03.2024, рецензирована 20.03.2024, принята 24.03.2024

Представлена действительным членом РАЕН А.А. Потаповым

**Аннотация:** Описан алгоритм и изучены особенности мультиплицирования дифракционных картин (то есть спектров пространственных частот, как вычисленных, так и экспериментально полученных) от плоских фрактальных объектов методом прореживания. В качестве основного объекта использовался один подробно описанный и изученный авторами фрактал L-системы, что значительно облегчало интерпретацию полученных результатов.

**Ключевые слова:** бифрактал, мультиплицирование, дифракция, дифракционная картина, префрактал, прореживание, сеточная функция, спектр пространственных частот, фрактал L-системы, Фурье-образ

УДК 51.74; 535.4

*Для цитирования:* Арзамасцева Г.В., Евтихов М.Г., Лисовский Ф.В. Мультиплицирование дифракционных картин от плоских геометрических фрактальных объектов с использованием метода прореживания. РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии, 2024, 16(3):373-380. DOI: 10.17725/rensit.2024.16.373.

## Diffraction patterns multiplication from flat geometric fractal objects using the thinning method

Galina V. Arzamastseva, Mikhail G. Evtikhov, Fedor V. Lisovsky

Kotel'nikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Fryazino Branch, <http://fireras.su/>

Fryazino 141120, Moscow Region, Russian Federation

E-mail: [arzamastseva@mail.ru](mailto:arzamastseva@mail.ru), [emg20022002@mail.ru](mailto:emg20022002@mail.ru), [lisovsky.f@yandex.ru](mailto:lisovsky.f@yandex.ru)

Received March 14, 2023, peer-reviewed March 20, 2023, accepted March 24, 2023

**Abstract:** An algorithm is described and the features of multiplying diffraction patterns (that is, spatial frequency spectra, both calculated and experimentally obtained) from flat fractal objects using the thinning method are studied. One fractal of the L-system, described in detail and studied by the authors, was used as the main object, which greatly facilitated the interpretation of the results obtained.

**Keywords:** bifractal, multiplication, diffraction, diffraction pattern, prefractal, thinning, grid function, spatial frequency spectrum, L-system fractal, Fourier image

UDC 51.74; 535.4

*For citation:* Galina V. Arzamastseva, Mikhail G. Evtikhov, Fedor V. Lisovsky. Diffraction patterns multiplication from flat geometric fractal objects using the thinning method. RENSIT: Radioelectronics. Nanosystems. Information Technologies, 2024, 16(3):373-380e. DOI: 10.17725/j.rensit.2024.16.373.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ (374)
  2. ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ (375)
  3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ (378)
- ЛИТЕРАТУРА (379)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] численным методом было проведено исследование мультиплицирования спектров пространственных частот при фраунгоферовой дифракции света на плоских прореженных фрактальных объектах, результаты которого были подтверждены экспериментально в работе [2]. Мультиплицирование отображается квадратной матрицей, транслируемым элементом которой является та часть спектра, которая соответствует фрактальной части дифракционной картины исходного "непрореженного" фрактала. Как показано впервые в работе [3], на дифрактограммах реальных фрактальных объектов можно выделить центральную фрактальную часть, обладающую свойством масштабирования, и периферическую часть, которая таковым не обладает. В данной работе численно и экспериментально исследуются условия, при которых происходит расширение транслируемого элемента за счет периферической части спектра исходного "непрореженного" фрактала.

Задача о мультиплицировании спектров пространственных частот плоских объектов родственна задаче о мультиплицировании изображений, успешное решение которой позволило реализовать технологию изготовления интегральных схем с однократной экспозицией [4,5], что привело к бурному развитию микроэлектроники. Необходимость решения первой задачи возникала значительно реже,

например, в системах многоканальной обработки и передачи данных. Наиболее известный к настоящему времени метод мультиплицирования спектров пространственных частот основан на использовании дискретизации двумерной функции с помощью квадратной решетки дельта функций, называемой также двумерной гребенчатой функцией, см., например, [6,7].

Сходная идея была использована в описанном нами численном методе [1], когда с помощью компьютера выполнялись все необходимые операции: создание черно-белых растровых изображений двумерных объектов, их оцифровка с использованием однородной сеточной функции периода  $d$  большим числом узлов (до  $4096 \times 4096$ ), обеспечивающим адекватное отображение наименьших деталей с габаритным размером  $l_{\min}$ , прореживание оцифрованного изображения до выбранной степени, расчет спектра пространственных частот разреженного объекта с помощью быстрого преобразования Фурье и получение итогового растрового изображения в виде квадратной решетки  $m \times m$ , транслируемым элементом которой является та часть спектра, которая соответствует фрактальной части дифракционной картины исходного непрореженного фрактала. Для отображения интенсивности спектральных составляющих на плоскости использовалась линейная шкала с различными уровнями серого<sup>1</sup>. Ранее авторами работы [11] было обнаружено, что соответствие вычисленных дифракционных картин наблюдаемым в экспериментах достигается при  $p \geq 4$ , где параметр  $p = l_{\min}/d$  определяется отношением габаритного размера наименьшего элемента к периоду сетки; данное условие соблюдалось при создании с помощью компьютера исследуемых фрактальных объектов.

Цель настоящей работы заключается в исследовании условий, при которых происходит расширение спектра частот в транслируемом элементе за счет периферической части спектра исходного непрореженного фрактала и сравнении получаемых численным методом спектров с наблюдаемыми в экспериментах при фраунгоферовой дифракции света на изображениях прореженных фракталов, переносимых на прозрачную пленку с помощью фотонаборного автомата высокого разрешения. Ранее подобное сравнение спектров было выполнено для многих "непрореженных" объектов, таких как фрактал Вичека, ковер Серпинского, снежинки Коха и др. В экспериментах использовался работающий на длине волны 0.63 мкм гелий-неоновый лазер, пучок света от которого с помощью системы из конфокальных линз коллимировался и расширялся до диаметра, превышающего поперечные размеры изображения фрактального объекта. Изображение дифракционной картины в плоскости дифракции можно было визуально наблюдать на экране, либо подвергать необходимой обработке с помощью сопряженного с компьютером цифрового фотоаппарата [11].

## 2. ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основным объектом исследования являлся подробно описанный в [1,12] фрактал  $L$ -системы [13,14] с затравочным множеством (аксиомой) в виде единичного черного квадрата (далее – фрактал  $1L$ ). Если этот квадрат на комплексной плоскости (с направлением вещественной и мнимой осей вниз и направо соответственно) поместить в начало координат так, как показано на Рис. 1а, то процесс конструирования этого фрактала может быть представлен в виде рекуррентных соотношений:

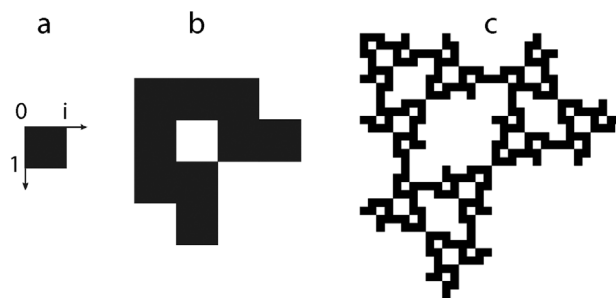


Рис. 1. Аксиома (а) и предфракталы 1-го (b) и 4-го (c) поколений для фрактала  $1L$ .

$$Z^{(n+1)} = Z^{(n)} \cup \left( iZ^{(n)} + (1+i)2^n \right) \cup \left( -iZ^{(n)} + (1+i)2^n \right) \quad (1)$$

где  $Z^{(0)}$  – затравочное множество (единичный черный квадрат), а символ  $\cup$  означает объединение множеств. Изображения предфракталов первого и четвертого поколения представлены на Рис. 1b и 1c.

Вычисленные и экспериментально полученные дифрактограммы для фрактала  $1L$  седьмого поколения приведены на Рис. 2 в трех разных масштабах.

Мультипликация спектров пространственных частот фракталов  $1L$  любого поколения становится возможной, если при сохранении правил конструирования (1) исходную аксиому (см. Рис. 1а) заменить единичным белым

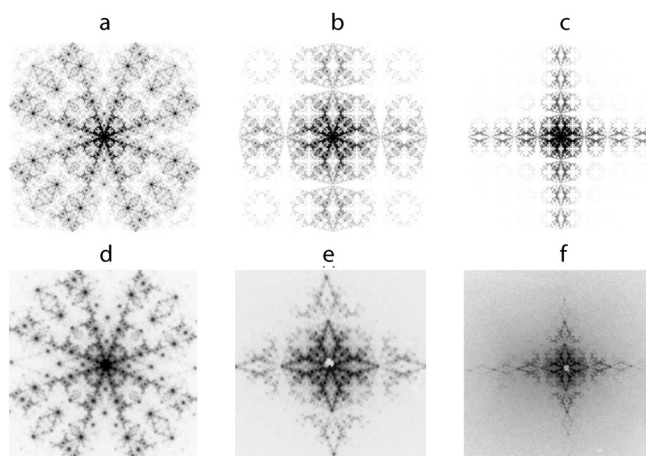
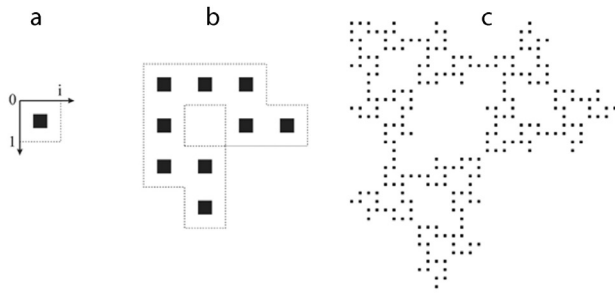


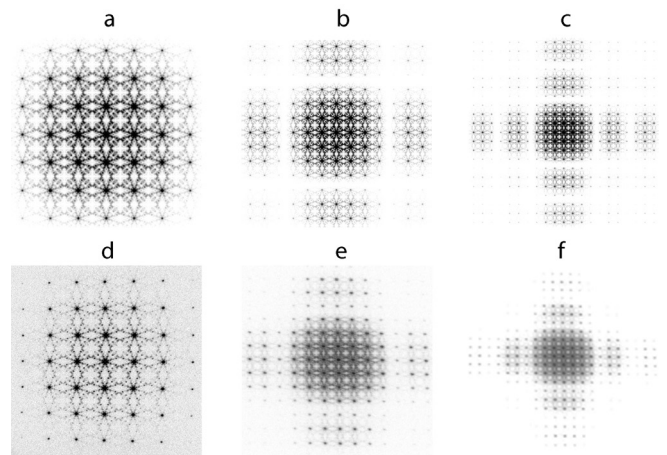
Рис. 2. Вычисленные (a,b,c) и экспериментально полученные (d,e,f) дифрактограммы для фрактала  $1L$  8-го поколения в трех разных масштабах: (a,d)-фрактальная часть (ближний план); (b,e)- средний план и (c,f)- дальний план.



**Рис. 3.** Аксиома (a) и разреженные предфракталы 1-го (b) и 4-го (c) поколений при  $q = 3$  для фрактала  $1L$ ,  $n = 1$ .

квадратом с расположенным в центре черным квадратом со стороной  $1/q$ , где  $q$  – любое положительное число, большее единицы (см. **Рис. 3a**). Замена аксиомы приводит к прореживанию фрактального множества. Чем больше  $q$ , тем более разреженным получается итоговый объект. На **Рис. 3b** и **Рис. 3c** показаны "разреженные" фракталы 1-го и 4-го поколения соответственно при  $q = 3$ .

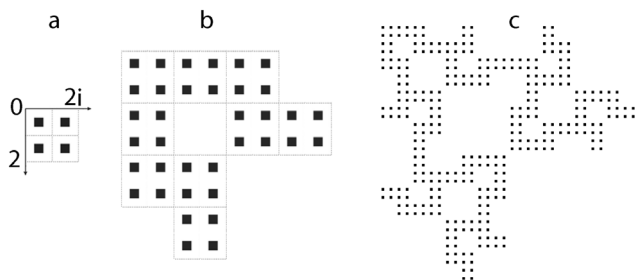
При таком алгоритме построения "разреженного" предфрактала его спектры пространственных частот (изображений разреженных предфракталов) имеют довольно сложную, зависящую от параметра  $q$  конфигурацию, в которой можно выделить центральную часть, представляющую из себя квадратную решетку  $m \times m$  из копий спектра фрактальной части исходного фрактала  $1L$ , обладающей самоподобием (см. **Рис. 2a** и **Рис. 4a**), и периферийную, образуемую удаленными от центральной части группами сателлитов, расположенными симметрично на исходящих из центра под прямым углом друг к другу четырех лучах. Заметим, что и эти группы составляют копии спектра фрактальной части исходного фрактала; фактически весь дифракционный спектр "промодулирован" в соответствии с фрактальной частью исходного фрактала. Наличие особенностей в спектре пространственных частот плоских фракталов обнаружили авторы работы [3], где они для обозначения центральной и периферийной частей использовали термины "фрактальная



**Рис. 4.** Вычисленные (a,b,c) при  $q = 3.67$  и экспериментально полученные (d,e,f) дифрактограммы для разреженного фрактала  $1L$  7-го поколения при  $n = 1$  в трех разных масштабах: (a,d) – центральная часть (ближний план); (b,e) – средний план и (c,f) – дальний план.

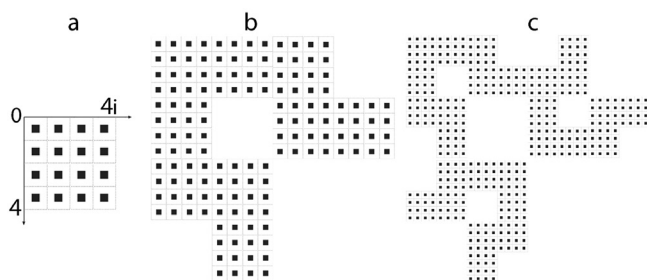
часть" и "решеточная часть" и связали появление последней с тем, что в двумерном множестве элементов, образующих фрактал, можно выделить одномерные дифракционные решетки, состоящие из одинаково ориентированных элементов. Число копий  $m \times m$  определяется степенью разреженности исходного фрактала, т.е., параметром  $q$ . Чем больше  $q$ , тем больше становится  $m$  [1,2].

На **Рис. 4** в трех разных масштабах приведены полученные численным методом спектры при  $q = 3.67$  (**Рис. 4a,b,c**) и экспериментальные спектры пространственных частот для "разреженного" фрактала  $1L$  (разрежение для компьютерных изображений соответствовало значению  $q = 3$ ) (**Рис. 4d,e,f**). При тщательном изучении экспериментальных дифракционных картин для "разреженных" фракталов было обнаружено, что они практически всегда имеют отличия в периферической части от получаемых численным методом. Визуальные наблюдения с микроскопом за напечатанными на фотонаборном автомате фрактальными структурами показали, что они являются более разреженными, чем исходные компьютерные с  $q = 3$  и реальное



**Рис. 5.** Аксиома (a) и разреженные предфракталы 1-го (b) и 3-го (c) поколений при  $q = 3$  для фрактала  $1L$ ,  $n = 2$ . значение  $q = 3.67$ . При использовании в вычислениях параметра  $q = 3.67$  отличия в экспериментальных и вычисленных дифрактограммах были устранены (см. Рис. 4).

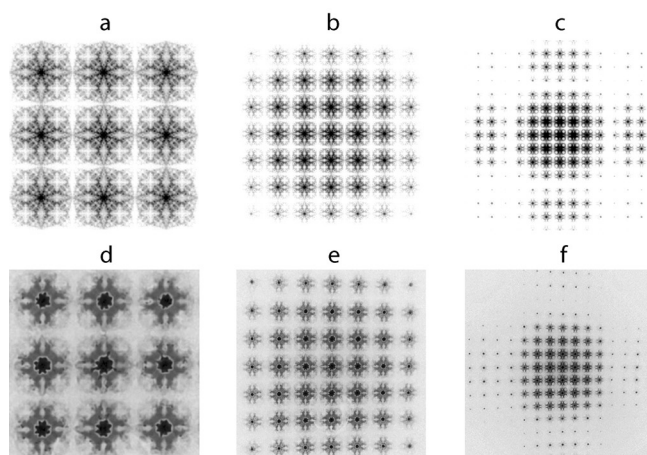
Изменение содержимого транслируемого элемента происходит при изменении алгоритма построения "прореженного" фрактала, а именно: при сохранении правил конструирования (1) исходная аксиома (см. Рис. 1a) заменяется решеткой  $n \times n$ , состоящей из единичных белых квадратов с расположенными в центре черными квадратами со стороной  $1/q$ , где  $q$  – любое положительное число, большее единицы (Рис. 3a). При этом построение, показанное на Рис. 3, будет соответствовать случаю  $n = 1$ . На Рис. 5a приведена такая решетка для случая  $n = 2$ ; на Рис. 5b и Рис. 5c показаны



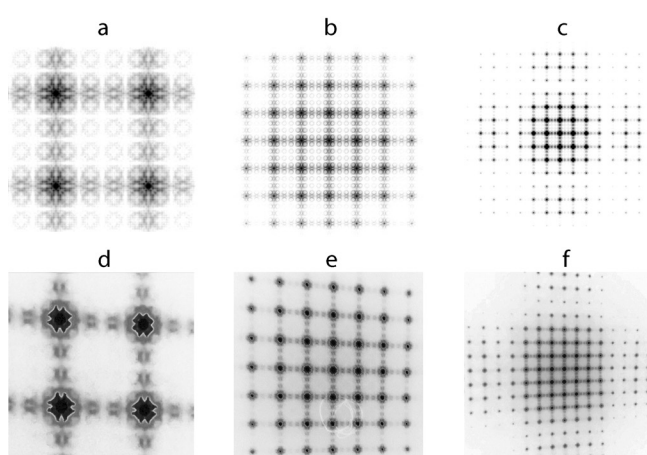
**Рис. 7.** Аксиома (a) и разреженные предфракталы 1-го (b) и 2-го (c) поколений при  $q = 3$  для фрактала  $1L$ ,  $n = 4$  "разреженные" фракталы 1-го и 3-го поколения соответственно при  $q = 3$ .

На Рис. 6 приведены в разных масштабах вычисленные (Рис. 6a,b,c) и экспериментально полученные (Рис. 6d,e,f) дифрактограммы для  $n = 2$ . В мелком масштабе (ближний план, Рис. 6a,d), видно, что содержимое транслируемых элементов расширяется по сравнению со случаем  $n = 1$  в два раза, тогда как в крупном (дальний план, Рис. 6c,f) дифракционная картина неплохо совпадает с таковой для случая  $n = 1$  (Рис. 4c,f).

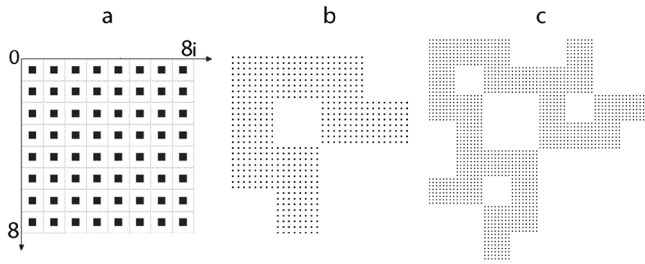
Аналогичные построения при  $q = 3$  были выполнены для случаев  $n = 4$  (Рис. 7) и  $n = 8$  (Рис. 9). Соответствующие вычисленные дифрактограммы (также, как и для случая  $n = 1$ , была проведена коррекция  $q$ , т.е.  $q = 3.67$ ) приведены на Рис. 8a,b,c и Рис. 10(a,b,c), а экспериментально полученные – на



**Рис. 6.** Вычисленные (a,b,c) при  $q = 3.67$  и экспериментально полученные (d,e,f) дифрактограммы для разреженного фрактала  $1L$  6-го поколения при  $n = 2$  в трех разных масштабах: (a,d) – центральная часть (ближний план); (b,e) – средний план и (c,f) – дальний план.

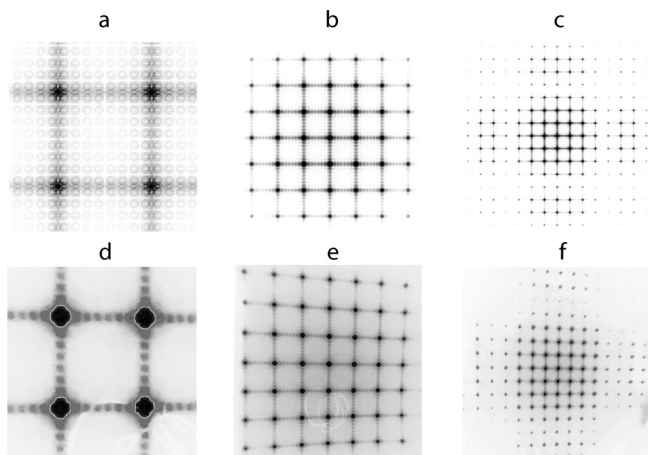


**Рис. 8.** Вычисленные (a,b,c) при  $q = 3.67$  и экспериментально полученные (d,e,f) дифрактограммы для разреженного фрактала  $1L$  5-го поколения при  $n = 4$  в трех разных масштабах: (a,d) – центральная часть (ближний план); (b,e) – средний план и (c,f) – дальний план.

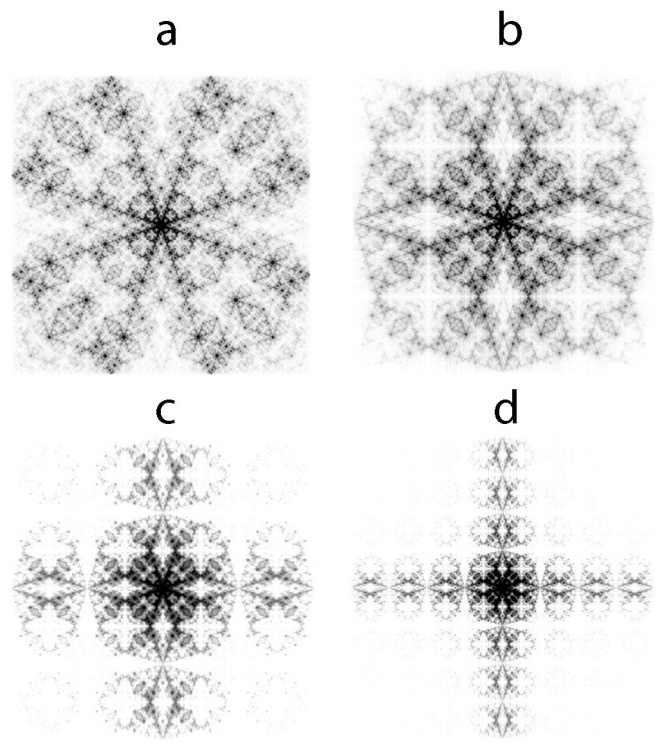


**Рис. 9.** Аксиома (a) и разреженные предфракталы 1-го (b) и 2-го (c) поколений при  $q = 3$  для фрактала  $1L$ ,  $n = 8$ .

Рис. 8(d,e,f) и Рис. 10(d,e,f). В обоих случаях в крупном масштабе (дальний план) дифрактограммы выглядят почти одинаково, так же, как и для случая  $n = 1$ . В мелком масштабе (ближний план) видно, что содержимое транслируемого элемента увеличивается при увеличении  $n$  и включает в себя все большую часть дифракционной картины исходного непрореженного фрактала. Во всех случаях наблюдается хорошее соответствие вычисленных (с коррекцией  $q$ ) и экспериментально полученных дифрактограмм. Однако для случаев  $n = 2, 4, 8$  периферические части на экспериментально полученных дифрактограммах (Рис. 6f, Рис. 8f и Рис. 10f) несколько хуже соответствуют вычисленным (Рис. 6c, Рис. 8c и Рис. 10c),



**Рис. 10.** Вычисленные (a,b,c) при  $q = 3.67$  и экспериментально полученные (d,e,f) дифрактограммы для разреженного фрактала  $1L$  4-го поколения при  $n = 8$  в трех разных масштабах: (a,d) – центральная часть (ближний план), (b,e) – средний план и (c,f) – дальний план.



**Рис. 11.** Транслируемые элементы при  $n = 1$  (a),  $n = 2$  (b),  $n = 4$  (c) и  $n = 8$  (d).

чем для случая  $n = 1$ . Мы полагаем, что это связано с тем, что печать образцов для случаев  $n = 2, 4, 8$  проводилась спустя 5 лет после печати таковых с  $n = 1$  и фотонаборный автомат за это время отчасти изменил свои характеристики.

На **Рис. 11a,b,c,d** показаны соответствующие транслируемые элементы для случаев  $n = 1, 2, 4, 8$ . Видно, что при увеличении  $n$  в два раза содержимое транслируемого элемента возрастает также в 2 раза.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе численным методом и экспериментально исследовалось мультиплицирование дифракционных картин на "прореженных" фрактальных объектах.

Мультиплицирование происходило в случае замены наименьших элементов, образующих фрактал, на решетку  $n \times n$ , состоящую из единичных белых квадратов с расположенными в центре черными квадратами со стороной

$1/q$ , где  $q$  – любое положительное число, большее единицы. При таком алгоритме построения разреженного предфрактала его спектры пространственных частот имеют довольно сложную конфигурацию, в которой можно выделить центральную часть, представляющую из себя квадратную решетку  $m \times m$  из копий части спектра исходного неразрезанного фрактала и периферийную, образуемую удаленными от центральной части группами сателлитов, расположенными симметрично на исходящих из центра под прямым углом друг к другу четырех лучах и состоящими из тех же элементов трансляции. Как было показано ранее [1,2], число копий  $m \times m$  в центральной части и общий вид дифракционной картины определяются параметром  $q$ , причем с увеличением  $q$  возрастает число копий в центре  $m \times m$ . Содержимое транслируемой ячейки определяется числом  $n$ . При  $n = 1$  в качестве транслируемого элемента выступает фрактальная часть спектра исходного непрореженного фрактала. При увеличении  $n$  в 2, 4 и 8 раз происходит соответствующее расширение спектра в транслируемом элементе в 2, 4 и 8 раз. Эти элементы образуют не только центральную часть дифрактограммы, но и периферическую. При  $n = 8$  транслируемый элемент содержит практический полный спектр исходного "непрореженного" фрактала.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Арзамасцева ГВ, Евтихов МГ, Лисовский ФВ. Компьютерное моделирование мультиплицирования фурье-спектров предфракталов  $L$ -системы. *Электромагнитные волны и электронные системы*, 2012, 17(12):29-32.
2. Арзамасцева ГВ, Евтихов МГ, Лисовский ФВ, Мансветова ЕГ. Мультиплицирование спектров пространственных частот

черно-белых изображений плоских фрактальных объектов. *Журнал радиоэлектроники*, 2018, 9:1-15.

3. Uozumi J, Kimura H, Asakura T. Fraunhofer diffraction by Koch fractals. *J. Mod. Optics*, 1990, 37(6):1011-1031.
4. Grove AS. *Physics and technology of semiconductor devices*. New York, John Wiley & Sons, 1967, 388 p.
5. Lu S. Generating multiple images for integrated circuits by Fourier-transform holograms. *Proc. IEEE*, 1968, 56(1):116-117.
6. Goodman JW. *Introduction to Fourier optics*. New York, McGraw Hill Book Co., 1968, 457 p.
7. Pratt WK. *Digital image processing*. New York, John Wiley & Sons, 2007, 738 p.
8. Арзамасцева ГВ, Евтихов МГ, Лисовский ФВ, Лукашенко ЛИ. Компьютерное моделирование дифракции света на фрактальных доменных структурах. *Тр. XIX Междунар. школы-семинара "Новые магнитные материалы микроэлектроники"*, Москва, 2004, с. 632-634.
9. Арзамасцева ГВ, Евтихов МГ, Лисовский ФВ, Мансветова ЕГ, Темиряева МП. Аморфизация бипериодических доменных структур в квазиодноосных магнитных пленках критической толщины. *ЖЭТФ*, 2008, 134(2):282-290.
10. Арзамасцева ГВ, Евтихов МГ, Лисовский ФВ, Мансветова ЕГ. Фурье-образы фрактальных объектов. *Изв. РАН, Сер. физ.*, 2010, 74(10):1430-1432.
11. Арзамасцева ГВ, Евтихов МГ, Лисовский ФВ, Мансветова ЕГ. Дифракция света на фракталах: сопоставление данных экспериментов с получаемыми численными методами Фурье-образами изображений объектов. *РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*, 2017, 9(2):221-229. DOI: 10.17725/rensit.2017.09.221.

12. Арзамасцева ГВ, Евтихов МГ, Лисовский ФВ, Мансветова ЕГ. Свойства плоских геометрических бифракталов. РЭНСИТ: Радиозлектроника. Наносистемы. Информационные технологии, 2012, 4(2):93-107.
13. Linder Mayer A. Mathematical model for cellular interaction in development. I. Filaments with one-sided inputs. *J. Theor. Biol.*, 1968, 18(3):280-299.
14. Linder Mayer A. Mathematical model for cellular interaction in development. II. Simple and branching filaments with two-sided inputs. *J. Theor. Biol.*, 1968, 18(3):300-315.

**Арзамасцева Галина Васильевна**

*к.ф.-м.н., с.н.с.*

ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

**Фрязино 141190, Московская область, Россия**

**E-mail: arzamastseva@mail.ru**

**Евтихов Михаил Георгиевич**

*к.ф.-м.н., с.н.с.*

ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

**Фрязино 141190, Московская область, Россия**

**E-mail: emg20022002@mail.ru**

**Лисовский Федор Викторович**

*д.ф.-м.н., проф.*

ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

**Фрязино 141190, Московская область, Россия**

**E-mail: lisovsky.f@yandex.ru.**